

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Mohamed Khider -  
Biskra  
Faculté des Sciences et de la  
Technologie  
Département de Génie Mécanique



جامعة محمد خيضر  
بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم الهندسة الميكانيكية  
المرجع: .....

Réf : .....

Mémoire présenté en vue de l'obtention

du diplôme de

**Magistère**

Spécialité : **Génie Mécanique**  
Option : **Construction Mécanique**

*Intitulé:*

**ANALYSE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES  
PLAQUES STRATIFIEES RECTANGULAIRES MINCES  
SYMETRIQUES EN MATERIAUX COMPOSITES**

Présenté Par : **Abderrazak ELGHARBI**

Soutenu publiquement le : .....

**Devant le jury :**

Dr. N. MOUMMI	Maître de conférences (A)	Université de Biskra	Président
Dr. M. HADID	Maître de conférences (A)	Université de Biskra	Examineur
Dr. A. TATI	Maître de conférences (A)	Université de Biskra	Examineur
Dr. M. HECINI	Maître de conférences (A)	Université de Biskra	Rapporteur



**Université Mohamed Khider- Biskra**  
**Faculté des Sciences et de la Technologie**  
**Département de Génie Mécanique**



## *Mémoire*

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de magistère

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Construction Mécanique

Présenté Par :

**Abderrazak ELGHARBI**

## **Thème**

**ANALYSE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES  
PLAQUES STRATIFIEES RECTANGULAIRES MINCES  
SYMÉTRIQUES EN MATERIAUX COMPOSITES**

Soutenu le :.... /.... /2010

Dr. N. MOUMMI	Maître de conférences (A)	Université de Biskra	Président
Dr. M. HADID	Maître de conférences (A)	Université de Biskra	Examineur
Dr. A. TATI	Maître de conférences (A)	Université de Biskra	Examineur
Dr. M. HECINI	Maître de conférences (A)	Université de Biskra	Rapporteur



# **SOMMAIRE**



# SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
<b>PARTIE 1. ANALYSE THEORIQUE</b>	
<b>I. Généralité sur les matériaux composites stratifiés</b>	
I.1.Introduction:	3
I.1.1 Avantage des matériaux composites	4
I.1.2 Inconvénients des matériaux composites :	4
I.2. Classification des matériaux composites	4
I.2.1 Classification suivant la nature des constituants:	5
I.2.2 Classification suivant la forme des constituants:	5
I.3 Les stratifiés:	6
I.4 Comportement mécanique des matériaux composites:	7
I.4.1 Introduction:	7
I.4.2 Description des contraintes:	7
I.4.3 Description des déformations:	8
I.4.4 Equations de compatibilité:	9
I.4.5 Relation contrainte – déformation:	9
I.4.5.1 Matrice de rigidité:	9
I.4.5.2 Matrice de flexibilité:	10
I.4.5.3 Changement de base:	10
I.5 Caractérisation du matériau:	11
I.5.1 Introduction:	11
I.5.2 matériau monoclinique:	12
I.5.3 Matériau orthotrope:	12
I.5.4 Matériau unidirectionnel:	12
I.5.5 Matériau isotrope:	13

I.5.6 Expression des constantes $c_{ij}$ d'un matériau orthotrope:	13
I.5.6.1 Essais de traction dans le sens $(\vec{e}_2)$ :	13
I.5.6.2 Essais de cisaillement:	14
I.5.6.3 Conclusion:	14
I.6 Théorie classique des stratifiés:	15
I.6.1 Etude d'une couche unique dans le cas d'un matériau orthotrope:	16
I.6.1.1 Etat de contraintes planes:	16
I.6.1.2 Matrice de rigidité réduite:	16
I.6.1.3 Détermination des modules d'élasticité:	17
I.6.2 Expression des déformations dans le cadre de la théorie de plaques:	18
I.6.2.1 Déformation d'une normale:	18
I.6.2.2 Expression des déformations:	19
I.6.3 Expression des contraintes et des efforts résultants:	10
I.6.3.1 Expression des contraintes dans une couche:	10
I.6.3.2 Expression des efforts résultants:	20
I.6.4 Relations déformation—résultantes:	22
I.6.4.1 Expression contraintes—déformation pour une couche:	22
I.6.4.2 Résultantes en membrane:	22
I.6.4.3 Moments de flexion et de torsion:	22
I.6.4.4 Expression des résultantes dans le plan:	23
Bibliographie	24

## II. Comportement dynamique des structures

II.1.Introduction:	25
II.2.Relation fondamentale de la dynamique:	25
II.3 Relation fondamentale de la dynamique appliquée à un élément de plaque:	25
II.3.1 Relation fondamentale relatives aux résultantes de membrane:	25
II.3.2 Relation fondamentale relatives aux résultantes de cisaillement:	27
II.3.3 Relation fondamentale relatives aux moments:	27
II.3.4 Résumé des relations fondamentales:	28
II.4 formulation énergétique de la théorie des stratifiés :	30
II.4.1 Introduction :	30
II.4.2 Energie de déformation d'un stratifié :	31

II.4.3 Energie cinétique d'un stratifié :	33
II.4.4 Travail des forces :	33
II.4.5. Equation d'équilibre dynamique:	33
Bibliographie	36

## **PARTIE 2. MODELISATION ET PROGRAMMATION**

### **III. Formulation par la méthode des éléments finis et programmation**

III.1 Introduction:	37
III.2. Formulation mathématique:	38
III.3 Formulation par éléments finis :	39
III.3.1 Formulation élémentaire:	42
III.3.2 Formulation globale:	44
III.3.2.1 Assemblage:	44
III.4 Programmation:	45
III.4.1 Introduction:	45
III.4.2 Organisation du programme:	45
Bibliographiques:	52

### **IV. Validation de l'élément fini dans l'analyse du comportement dynamique des plaques.**

IV.1 Introduction :	53
IV.2 Validation de l'élément fini dans l'analyse statique des plaques :	54
IV.2 .1 plaque isotrope uniformément chargée:	54
IV.2 .2 Plaque isotrope avec une charge concentrée:	54
IV.3 Validation de l'élément fini dans l'analyse dynamique des plaques :	56
IV.3 .1 plaque isotrope:	56
IV.3 .2 plaque orthotrope:	59
IV.4 Conclusion	62
Bibliographiques:	63



## **PARTIE 3. Etude paramétrique**

### **V. Etude paramétrique**

V.1 Effet des conditions aux frontières sur les fréquences propres:	64
V.2 Effet de l'orientation des fibres sur les fréquences propres:	65
V.3 Effet de nombre de couches sur les fréquences propres:	76
V.4 Effets du rapport géométrique et de l'orientation des fibres sur les fréquences propres des plaques composites stratifiées :	78
V.5 Effet du rapport de l'anisotropie sur les fréquences propres:	81
V.6 Conclusion	84
 <b>CONCLUSION GENERALE</b>	 85
 <b>TABLE DES FIGURES</b>	 87
 <b>LISTE DES TABLEAUX</b>	 89
 <b>BIBLIOGRAPHIQUES:</b>	 91



# INTRODUCTION



## Introduction

En outre du choix de matériau, la conception d'un matériau composite stratifié répondant aux exigences imposées en terme de rigidité spécifique et résistance spécifique consiste à trouver l'empilement adéquat permettant d'offrir de bonnes caractéristiques mécaniques associées à un meilleur compromis performance/masse/coût.

L'importance de l'ordre d'empilement dans la conception des plaques stratifiées, impose nécessairement des études sur le comportement vibratoire de ces plaques afin de dégager l'ordre de grandeur des paramètres modaux (fréquences propres et déformations modales) et de mettre en évidence d'éventuels problèmes de résonance.

### **Etude bibliographique:**

En 2001, T. Kant, K. Swaminathan [11] ont présenté une formulation analytique pour l'analyse des fréquences naturelles des plaques composites. Le modèle théorique présenté ici est basé sur haut ordre de raffinement. Les équations du mouvement sont obtenues en utilisant le principe de Hamilton.

En 2002, J. Wang, K.M. Liew, M.J. Tan, S. Rajendran [14] ont présenté une étude adoptant une approche sans maillage, basée sur la méthode de " Kernel particle" pour la flexion, vibration libre et l'analyse de flambage des plaques stratifiées. Dans cette approche, la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDT) a été employée. Les conditions aux limites essentielles sont appliquées par la méthode du " Kernel particle".

En 2005, W.Q. Chen, C.F. Lue [15] ont présenté une étude basée sur la théorie tridimensionnelle de l'élasticité, une méthode semi-analytique, qui combine l'approche espace d'état avec la technique de quadrature différentielle, est développé pour les vibrations libres d'une plaque de diagonale feuilletée rectangulaire. La technique de quadrature différentielle est ensuite incorporée dans l'équation d'état, qui permet d'obtenir une solution pour les stratifiés orthotropes pour différentes conditions aux limites.

En 2008, H. Nguyen-Van, N. Mai-Duy, T. Tran-Cong [12] Ont présenté une analyse numérique des vibrations libres des plaques stratifiées. La méthode est basée sur un élément quadrilatère à quatre nœuds (MISQ20), en tenant compte des déformations de cisaillement de premier ordre (FSDT).

M. Bachene, S. Rechak [13] Ont présenté une analyse par éléments finis, basé sur la théorie de yang, Norris et Stavisky, les auteurs ont étudié l'effet du rapport géométrique et de l'orientation des fibres sur les fréquences propres des plaques composite stratifiées. Les effets du cisaillement transverse et de l'inertie de rotation sont pris en considération lors de cette étude.

### **But de travail:**

Le présent travail a pour but de déterminer les fréquences propres ainsi que les modes des vibrations des plaques en matériaux composites stratifiés.

Dans ce travail, on à examiné aussi l'effet de certains paramètres, tell que le rapport géométrique, l'orientation des fibres et les conditions aux limites,...etc. sur la variation des fréquences propres des plaques stratifiées rectangulaires minces symétriques en matériaux composites.

### **Organisation des chapitres:**

Ce travail est divisé en trois parties.

#### **Partie I : Analyse théorique**, organisée autour de deux chapitres :

Le premier chapitre est consacré à une généralité. Il présente les matériaux composites stratifiés en termes très généraux et leur comportement mécanique.

Le deuxième chapitre est consacré à une analyse des comportements dynamiques des structures.

#### **Partie II : Modélisation et programmation**, articulée sur deux chapitres :

Le troisième chapitre traite la formulation par la méthode des éléments finis et programmation.

Le quatrième chapitre consacré à un Validation de l'élément fini dans l'analyse du comportement dynamique des plaques.

**Partie III:** *Etude paramétrique*, articulée sur un chapitre :

Le dernier chapitre, concerne à une étude paramétrique pour mettre en évidence les effets de certains paramètres sur la variation des fréquences propre des plaques à savoir:

- Conditions aux limites.
- Rapport (longueur / largeur)
- Angle d'orientation des fibres.
- Rapport d'anisotropie.
- Nombres des couches.





# **PARTIE 1**

## **ANALYSE THEORIQUE**



# Chapitre I

## Généralité sur les matériaux composites stratifiés

I.1.Introduction:	3
I.1.1 Avantage des matériaux composites	4
I.1.2 Inconvénients des matériaux composites :	4
I.2. Classification des matériaux composites	4
I.2.1 Classification suivant la nature des constituants:	5
I.2.2 Classification suivant la forme des constituants:	5
I.3 les stratifié:	6
I.4 Comportement mécanique des matériaux composites:	7
I.4.1 Introduction:	7
I.4.2 Description des contraintes:	7
I.4.3 Description des déformations:	8
I.4.4 Equations de compatibilité:	9
I.4.5 Relation contrainte – déformation:	9
I.4.5.1 Matrice de rigidité:	9
I.4.5.2 Matrice de flexibilité:	10
I.4.5.3 Changement de base:	10
I.5 Caractérisation de matériaux:	11
I.5.1 Introduction:	11
I.5.2 matériau monoclinique:	12
I.5.3 Matériau orthotrope:	12
I.5.4 Matériau unidirectionnel:	12
I.5.5 Matériau isotrope:	13
I.5.6 Expression des constantes $c_{ij}$ d'un matériau orthotrope:	13
I.5.6.1 Essais de traction dans le sens $(\vec{e}_2)$ :	13
I.5.6.2 Essais de cisaillement:	14
I.5.6.3 Conclusion:	14
I.6 Théorie classique des stratifiés:	15
I.6.1 Etude d'une couche unique dans le cas d'un matériau orthotrope:	16

I.6.1.1 Etat de contraintes planes:	16
I.6.1.2 Matrice de rigidité réduite:	16
I.6.1.3 Détermination des modules d'élasticité:	17
I.6.2 Expression des déformations dans le cadre de la théorie de plaques:	18
I.6.2.1 Déformation d'une normale:	18
I.6.2.2 Expression des déformations:	19
I.6.3 Expression des contraintes et des efforts résultants:	10
I.6.3.1 Expression des contraintes dans une couche:	10
I.6.3.2 Expression des efforts résultants:	20
I.6.4 Relations déformation–résultantes:	22
I.6.4.1 Expression contraintes–déformation pour une couche:	22
I.6.4.2 Résultantes en membrane:	22
I.6.4.3 Moments de flexion et de torsion:	22
I.6.4.4 Expression des résultantes dans le plan:	23
Bibliographie	24

## I.1.Introduction:

Un matériau composite est constitué dans le cas le plus général d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. La phase discontinue est habituellement plus dure avec des propriétés mécaniques supérieures à celles de la phase continue. La phase continue est appelée *la matrice*. La phase discontinue est appelée le *renfort* ou *matériau renforçant*. Le matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes (*matrice, renfort*), se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément (figure 1.1).

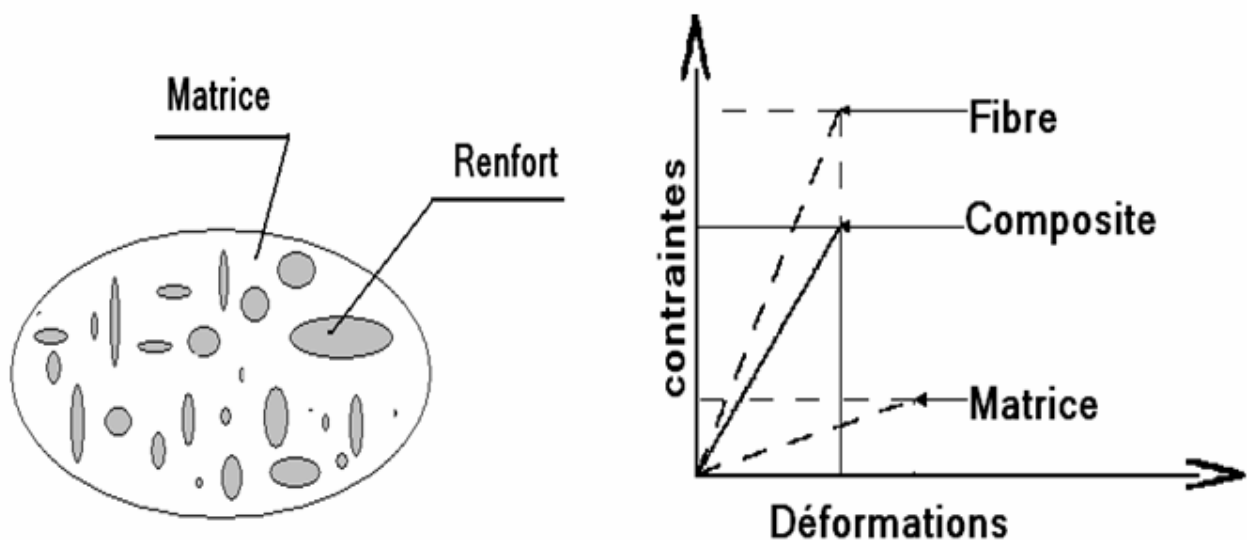


Figure 1.1. *Matériau composite*

### I.1.1 Avantage des matériaux composites :

- ❖ Bon rapport résistance/poids
- ❖ Mise en forme de pièces complexes (principe du moulage).
- ❖ Grande résistance à la fatigue
- ❖ Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf en cas de contact entre de l'aluminium et des fibres de carbone)

### I.1.2 Inconvénients des matériaux composites :

- ❖ Vieillissement sous l'action de l'eau et de la température
- ❖ Attention aux décapants de peinture qui attaquent les résines époxydes
- ❖ Tenue à l'impact moyenne par rapport aux métalliques
- ❖ Coût parfois prohibitifs (temps et coût études et mise en œuvre), le gain en coût est surtout valable pour des grandes séries.

## I.2. Classification des matériaux composites :

Les composites peuvent être classés selon la forme et la nature des composantes.

### I.2.1 Classification selon la nature des constituants :

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés suivant des composites à matrice organique, à matrice métallique ou à matrice minérale.

Devers renforts sont associés à ces matrices. Seuls certains couples d'associations ont actuellement un usage industriel, d'autres faisant l'objet d'un développement dans les laboratoires de recherche. Parmi ces composites, nous pouvons citer:

#### 1- Composites à matrice organique, avec :

- ✓ Des fibres minérales : verre, carbone, etc.
- ✓ Des fibres organiques : kevlar, polyamides, etc.
- ✓ Des fibres métalliques : bore, aluminium, etc.

#### 2- Composites à matrices métalliques, avec :

- ✓ Des fibres minérales : carbone, carbure de silicium, etc.
- ✓ Des fibres métalliques : bore, etc.
- ✓ Des fibres métallo-minérales : fibres de bore revêtues de carbure de silicium, etc.

#### 3- Composites à matrice minérale (céramique), avec :

- ✓ Des fibres métalliques : bore, etc.

- ✓ Des particules métalliques : cermets, etc.
- ✓ Des particules minérales : carbures, nitrures, etc.

### I.2.2 Classification selon la forme des constituants :

En fonction de la forme des constituants, les composites sont classés en deux grandes classes : les matériaux composites à particules et les matériaux composites à fibres.

#### 1- Composites à particules :

Un matériau composite est un composite à particules lorsque le renfort se trouve sous forme de particules.

Les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux ou des matrices.

#### 2- Composite à fibres :

Un matériau composite est un composite à fibres si le renfort se trouve sous forme de fibres. Les fibres utilisées se présentent soit sous forme de fibres continues, soit sous forme de fibres discontinues : fibres coupées, fibres courtes, etc. l'arrangement des fibres, leur orientation permettent de moduler à la carte les propriétés mécaniques des matériaux composites, pour obtenir des matériaux allant de matériaux fortement anisotropes à des matériaux isotropes dans un plan. Le concepteur possède donc là un type de matériau dont il peut modifier et moduler à volonté les comportements mécanique et physique en jouant sur :

- ✓ la nature des constituants,
- ✓ la proportion des constituants,
- ✓ l'orientation des fibres,

L'importance des matériaux composites à fibres justifie une étude exhaustive de leurs comportements mécaniques. En conséquence, le présent chapitre sera essentiellement consacré par la suite à l'étude de matériau composite stratifiée.

### I.3 Les stratifiés :

Les stratifiés sont constitués (figure 1.2) de couches successives (appelées parfois plis) de renforts (fils, mats, tissus, etc.) imprégnés de résines. Nous examinons les divers types de stratifiés.

#### ❖ Stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels :

Les stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels constituent un type de stratifié de base auquel peut se ramener en théorie tout autre type de stratifié. Ces stratifiés sont constitués (figure 1.3) de couches de fils ou de tissus unidirectionnels, dont la direction est décalée dans chaque couche.

La désignation de ces stratifiés est généralement effectuée selon le code suivant.

1. Chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degrés de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe  $x$  de référence.
2. Les couches successives sont séparées par un/ si leurs angles sont différents.
3. Les couches successives de même orientation sont désignées par un indice numérique.
4. Les couches sont nommées successivement en allant d'une face à l'autre. Des croches (ou parenthèses) indiquent le début et la fin du code.

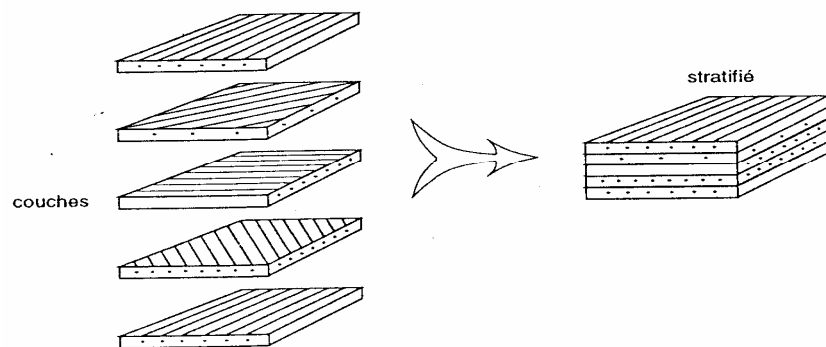


Figure 1.2: Constitution d'un stratifié

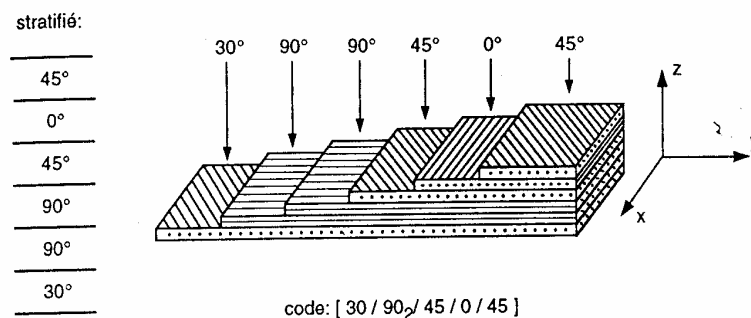


Figure 1.3: Désignation d'un stratifié



## I.4 Comportement mécanique des matériaux composites :

### I.4.1 Introduction :

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées lois de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par des axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes observés.

### I.4.2 Description des contraintes :

Illustration des contraintes par un cube élémentaire (Figure 1.4)

Notation :

Le champ de contraintes au un point  $M$  d'un solide est un tenseur d'ordre 2, symétrique, représenté par la matrice :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad 1.1$$

Comme  $\sigma(M)$  est symétrique,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  pour tout  $i \neq j$ .

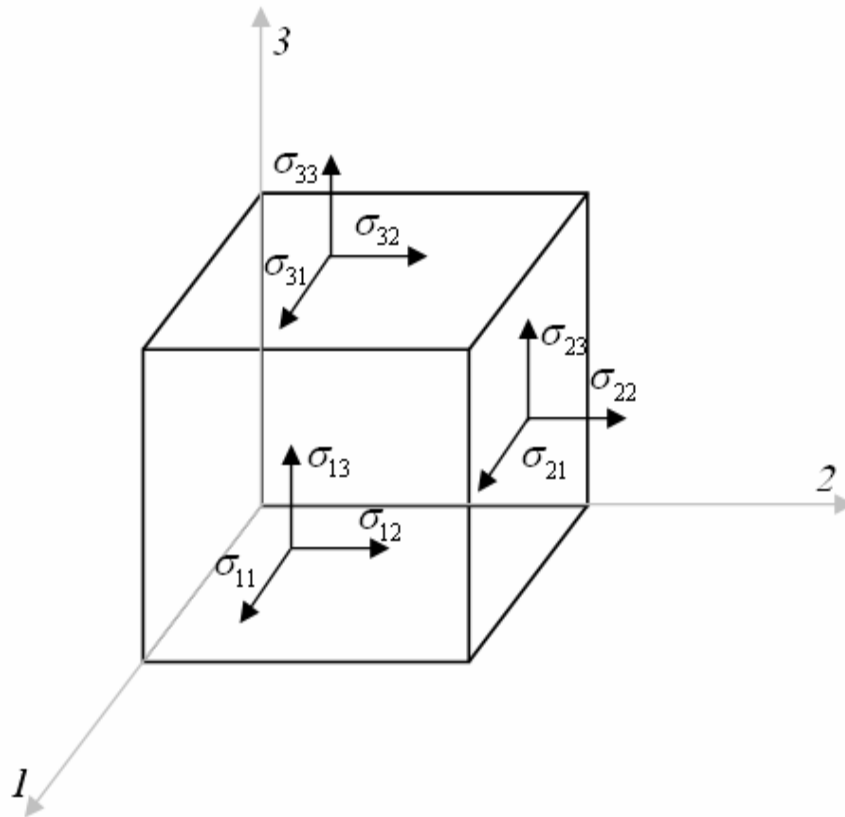


Figure 1.4 : Composantes des vecteurs contraintes dans un système d'axes (1, 2, 3)

- Contraintes principales:

Il existe un repère dans lequel  $\sigma(M)$  est de la forme:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad 1.2$$

Les contraintes dans ce repère sont les contraintes principales. Elles correspondent aux valeurs propres de la matrice  $\sigma(M)$ .

Notation pour l'ingénieur:

On peut noter les 6 variables du tenseur des contraintes sous la forme:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad 1.3$$

#### I.4.3 Description des déformations:

Comme dans le cas des contraintes, le champ de déformations au point  $M$  d'un solide est donc un tenseur d'ordre 2 symétriques notés  $\varepsilon(M)$ . Il y a donc 6 grandeurs représentant les déformations (3 translations et 3 rotations).

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}_R \quad 1.4$$

Avec les composantes du tenseur des déformations se réduisent alors à:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad 1.5$$

- Déformations principales:

Il existe un repère dans lequel  $\varepsilon(M)$  est de forme:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}_{R_{pri}} \quad 1.6$$

Les déformations dans ce repère sont les déformations principales. Elles correspondent aux valeurs propres de la matrice  $\varepsilon(M)$ .

Notation pour l'ingénieur:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \\ \gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad 1.7$$

#### I.4.4 Equations de compatibilité :

Les équations (1.5) traduisent qu'il existe un lien entre déplacements et déformations, et entre les déformations elles-mêmes.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jj}}{\partial x_i^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad i \neq j \quad 1.8$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} \right) \quad i \neq j \neq k$$

Les équations (1.8) constituent les six relations de compatibilité.

#### I. 4.5 Relation contrainte – déformation :

##### I.4.5.1 Matrice de rigidité :

La relation d'élasticité peut s'écrire sous forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad 1.9$$

Ou sous forme condensée:

$$\sigma = c\varepsilon \quad 1.10$$

Cette loi, généralement appelée loi de Hooke généralisée, introduit la matrice de rigidité  $c$ , symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général à l'aide de 21 coefficients indépendants, ici les 21 constantes de rigidité  $c_{ij}$ .

## I.4.5.2 Matrice de flexibilité :

La relation d'élasticité (1.9) peut être écrite sous forme inverse, suivante :

$$\varepsilon = s \sigma \quad 1.11$$

En introduisant la matrice inverse de la matrice de rigidité. La matrice  $s$  est appelée matrice de souplesse, et s'écrit dans le cas général:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} & s_{56} \\ s_{61} & s_{62} & s_{63} & s_{64} & s_{65} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad 1.12$$

Avec:

$$s = c^{-1} \quad 1.13$$

Les coefficients  $s_{ij}$  sont appelés constants de flexibilité ou constantes de souplesse.

## I.4.5.3 Changement de base :

Soit  $c$  la matrice de rigidité exprimée dans une base  $(\vec{e}) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et  $c' = [c'_{lk}]$  la matrice de rigidité exprimée dans la base  $(\vec{e}') = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ . Ces matrices relient les contraintes et déformations exprimées dans les bases respectives :

$$\text{- dans la base } (\vec{e}): \quad \sigma = c \varepsilon \quad 1.14$$

$$\text{- dans la base } (\vec{e}'): \quad \sigma' = c' \varepsilon' \quad 1.15$$

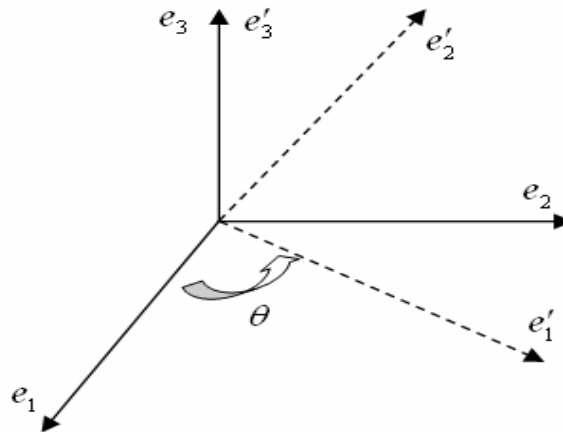


Figure 1.5 : Changement de base

La matrice de changement de base pour une rotation d'angle  $\theta$  de l'axe 3 s'écrit:

$$T = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -2sc & 2sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad 1.16$$

Avec:  $s = \sin \theta$  et  $c = \cos \theta$

Pour obtenir la relation de passage inverse, remplacer  $\theta$  par  $-\theta$

La relation de changement de base (1.16), il vient :

$$\sigma' = T\sigma = Tc\varepsilon \quad 1.17$$

$$\varepsilon' = T\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = T^{-1}\varepsilon' \quad 1.18$$

$$\text{donc : } \sigma' = TcT^{-1}\varepsilon' \quad 1.19$$

L'identification des expressions (1.15) et (1.19) conduite alors à la relation de changement de base des matrices de rigidité :

$$c' = TcT^{-1} \quad 1.20$$

Par un raisonnement analogue, on trouve de même la relation de changement de base des matrices souplesse :

$$s' = TsT^{-1} \quad 1.21$$

## I.5 Caractérisation de matériaux :

### I.5.1 Introduction :

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique.

La plupart des matériaux anisotropes possèdent une structure présentant une ou plusieurs symétries : par exemple, les monocristaux, les structures fibreuses, les matériaux composites à fibres ou tissus, etc. les propriétés de symétries géométriques réduisent alors le nombre de constantes indépendantes nécessaires pour décrire le comportement du matériau. Cette réduction est fonction des symétries présentées par le matériau considéré.

### I.5.2 matériau monoclinique :

Ce matériau possède un plan de symétrie. La forme de matrice de rigidité (ou de souplesse) doit être telle qu'un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. Dans ce cas le plan de symétrie est le plan (1.2), l'exploitation des changements de base conduit à une matrice de rigidité de la forme :

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} & 0 \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad 1.23$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constante d'élasticité indépendante est réduit à 13.

### I.5.3 Matériau orthotrope:

Le matériau orthotrope est un matériau à trois plans de symétrie orthogonaux deux à deux. En pratique, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère. La même démarche que précédemment conduite aux expressions dans un repère défini par les axes d'orthotrope :

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad 1.24$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constante d'élasticité indépendante est réduit à 9.

### I.5.4 Matériau unidirectionnel :

Le matériau unidirectionnel est un matériau possédant un axe de symétrie. C'est le cas pour un ensemble de fibres unidirectionnelles dans un substrat. Par géométrie, le matériau unidirectionnel est orthotrope. Il est souvent appelé orthotrope de révolution ou isotrope transverse. Dans le repère d'orthotrope, la matrice s'écrit :

$$\begin{bmatrix}
 c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\
 c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\
 c_{12} & c_{32} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{c_{22}-c_{23}}{2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}
 \end{bmatrix}
 \quad 1.25$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constante d'élasticité indépendante est réduit à 5.

### I.5.5 Matériau isotrope :

Isotrope : mêmes propriétés dans toutes les directions. La relation de comportement s'écrit :

$$\begin{bmatrix}
 c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\
 c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\
 c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2}
 \end{bmatrix}
 \quad 1.26$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constante d'élasticité indépendante est réduit à 2.

### I.5.6 Expression des constantes $c_{ij}$ d'un matériau orthotrope :

#### I.5.6.1 Essais de traction dans le sens $(\vec{e}_2)$ :

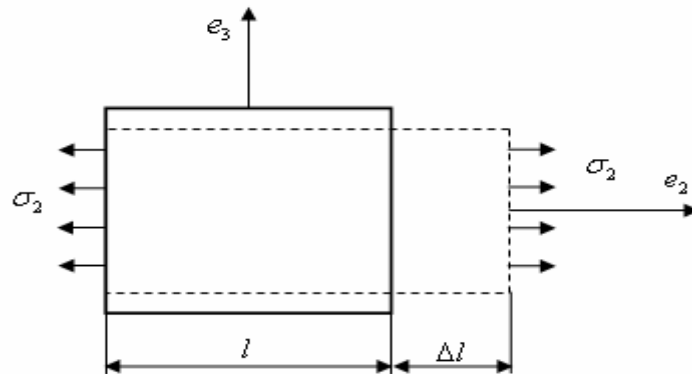


Figure 1.6 : Essais de traction dans le sens  $(\vec{e}_2)$

Dans un essai de traction suivant l'axe  $(\vec{e}_2)$ , toutes les contraintes sont nulles, excepté la contrainte  $\sigma_2$

$$\sigma_2 \neq 0 \quad \text{et} \quad \sigma_i = 0 \quad \text{si} \quad i \neq 2 \quad 1.27$$

La relation (1.25), écrit selon les paramètres de souplesse devient alors :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= s_{12}\sigma_2 & \sigma_2 &= \frac{1}{s_{22}}\varepsilon_2 & E_2 &= \frac{1}{s_{22}} \\ \varepsilon_2 &= s_{22}\sigma_2 & \text{soit} \quad \varepsilon_1 &= \frac{s_{12}}{s_{22}}\varepsilon_2 & d'ou \quad \nu_{21} &= -\frac{s_{12}}{s_{22}} \\ \varepsilon_3 &= s_{32}\sigma_2 & \varepsilon_3 &= \frac{s_{32}}{s_{22}}\varepsilon_2 & \nu_{23} &= -\frac{s_{23}}{s_{22}} \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0 \end{aligned} \quad 1.28$$

### I.5.6.2 Essais de cisaillement :

Un essai de cisaillement dans le plan de la couche correspond à un état de contrainte :

$$\sigma_6 \neq 0 \quad \text{et} \quad \sigma_i = 0 \quad \text{si} \quad i \neq 6 \quad 1.29$$

La relation (1.25) devient alors :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0 \\ \sigma_6 &= c_{66}\varepsilon_6 & d'ou \quad G_{12} &= c_{66} = \frac{1}{s_{66}} \end{aligned} \quad 1.30$$

### I.5.6.3 Conclusion :

La matrice de souplesse et de rigidité d'un composite orthotrope exprimées dans les axes d'orthotropie, il vient :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad 1.31$$

Les constantes de rigidités sont déduites en inversant la matrice de souplesse:



$$\begin{aligned}
c_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & c_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta} \\
c_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} & c_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \\
c_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} & c_{33} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\
c_{44} &= G_{23} & c_{55} &= G_{13} & c_{66} &= G_{12}
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Avec

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

Donc :

- A cause de la symétrie il existe un lien entre les modules d'élasticité et les coefficients de

$$\text{Poisson : } \frac{E_i}{\nu_{ij}} = \frac{E_j}{\nu_{ji}}$$

- le comportement élastique est décrit par 9 modules indépendants :

3 modules d'Young :  $E_1, E_2, E_3$

3 coefficients de Poisson :  $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$

3 modules de cisaillement :  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$

## I.6 Théorie classique des stratifiés :

La théorie classique des stratifiés utilise l'hypothèse de Kirchhoff :

**Hypothèse 1 :** L'épaisseur  $h$  est petite devant les dimensions moyennes de la plaque. C'est une plaque mince.

**Hypothèse 2 :** Les particules situées avant déformation sur une normale au feuillet moyen restent après déformation sur une normale au feuillet moyen déformé.

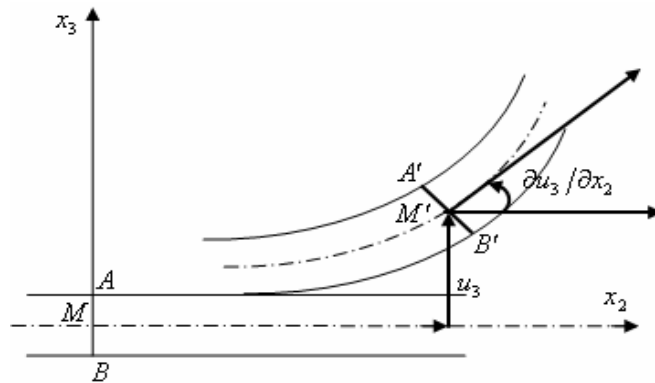


Figure 1.7: Déformée de la plaque dans le plan  $[2, 3]$

La section droite  $AMB$  avant déformation devient la section droite  $A'M'B'$  après déformation.

### I.6.1 Étude d'une couche unique dans le cas d'un matériau orthotrope :

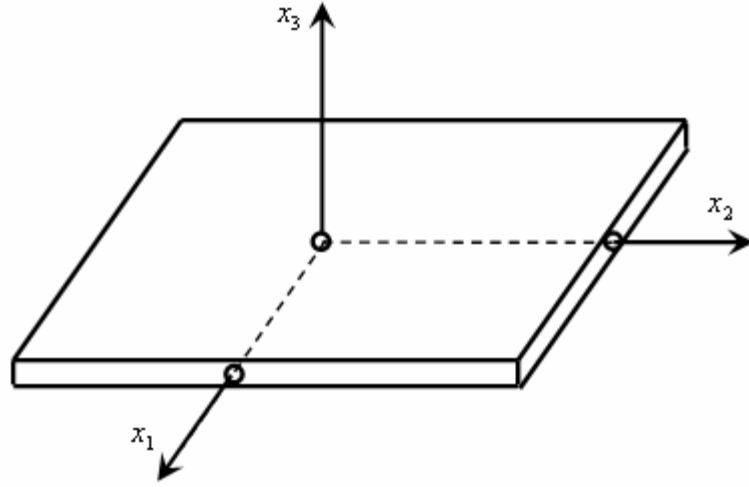


Figure 1.8: Système d'axe dans la théorie de plaque

#### I.6.1.1 État de contraintes planes :

L'état de contraintes planes peut être défini par une contrainte de la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 1.33$$

#### I.6.1.2 Matrice de rigidité réduite :

En contraintes planes, et pour un tissu ou un matériau unidirectionnel, la loi de Hooke généralisée, exprimée dans un repère quelconque ( $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ ) du plan de la plaque, s'exprime par :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c'_{11} & c'_{12} & c'_{13} & 0 & 0 & c'_{16} \\ c'_{21} & c'_{22} & c'_{23} & 0 & 0 & c'_{26} \\ c'_{31} & c'_{32} & c'_{33} & 0 & 0 & c'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c'_{44} & c'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c'_{54} & c'_{55} & 0 \\ c'_{61} & c'_{62} & c'_{63} & 0 & 0 & c'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix} \quad 1.34$$

Il vient donc que:

$$\varepsilon'_4 = \varepsilon'_5 = 0$$

$$\varepsilon'_3 = \frac{1}{c'_{33}} (c'_{13} \varepsilon'_1 + c'_{23} \varepsilon'_2 + c'_{36} \varepsilon'_6) \quad 1.35$$

Il est possible d'exprimer  $\sigma'_1$ ,  $\sigma'_2$  et  $\sigma'_6$  en fonction de  $\varepsilon'_1$ ,  $\varepsilon'_2$  et  $\varepsilon'_6$  :

$$\begin{aligned}\sigma'_1 &= \left( c'_{11} - \frac{c'^2_{13}}{c'_{33}} \right) \varepsilon'_1 + \left( c'_{12} - \frac{c'_{13} c'_{23}}{c'_{33}} \right) \varepsilon'_2 + \left( c'_{16} - \frac{c'_{13} c'_{36}}{c'_{33}} \right) \varepsilon'_6 \\ \sigma'_2 &= \left( c'_{12} - \frac{c'_{13} c'_{23}}{c'_{33}} \right) \varepsilon'_1 + \left( c'_{22} - \frac{c'^2_{23}}{c'_{33}} \right) \varepsilon'_2 + \left( c'_{26} - \frac{c'_{23} c'_{36}}{c'_{33}} \right) \varepsilon'_6 \\ \sigma'_6 &= \left( c'_{16} - \frac{c'_{13} c'_{36}}{c'_{33}} \right) \varepsilon'_1 + \left( c'_{26} - \frac{c'_{23} c'_{36}}{c'_{33}} \right) \varepsilon'_2 + \left( c'_{66} - \frac{c'^2_{36}}{c'_{33}} \right) \varepsilon'_6\end{aligned}\tag{1.36}$$

L'équation de comportement du monopli peut donc s'écrire:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix}_R &= \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix}_R = Q_R \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix}_R \\ &\text{et} \\ \begin{bmatrix} \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \end{bmatrix}_R &= \begin{bmatrix} c'_{44} & c'_{45} \\ c'_{45} & c'_{55} \end{bmatrix}_R \begin{bmatrix} \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \end{bmatrix}_R\end{aligned}\tag{1.37}$$

La matrice symétrique  $Q_R$  est appelée « matrice de rigidité réduite ». Elle représente le comportement de la couche anisotrope en contraintes planes.

Dans le cadre de l'étude des matériaux orthotropes, la matrice  $Q_R$  devient dans le repère d'orthotropie :

$$Q_{Ortho} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_{Ortho}\tag{1.38}$$

### I.6.1.3 Détermination des modules d'élasticité :

Si le composite subit une traction pure selon chacun de ses axes principaux ou un cisaillement plan dans ses axes principaux, on montre facilement que :

$$\begin{aligned}Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_1}{1 - \frac{E_2}{E_1}\nu_{12}^2} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_2}{1 - \frac{E_2}{E_1}\nu_{12}^2} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \nu_{12}Q_{22} \\ Q_{66} &= G_{12}\end{aligned}\tag{1.39}$$

Constantes de rigidité réduites d'un composite unidirectionnel ou orthotrope, en dehors de ses axes principaux :

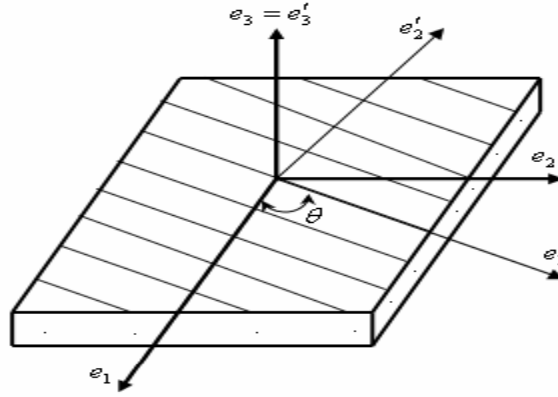


Figure 1.9: Couche d'un matériau orthotrope

$$\begin{aligned}
 Q'_{11} &= Q_{11}C^4 + Q_{22}S^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})S^2C^2 \\
 Q'_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})S^2C^2 + Q_{12}(C^4 + S^4) \\
 Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})SC^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})S^3C \\
 Q'_{22} &= Q_{11}S^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})S^2C^2 + Q_{22}C^4 \\
 Q'_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})S^3C + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})SC^3 \\
 Q'_{66} &= [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})]S^2C^2 + Q_{66}(S^4 + C^4)
 \end{aligned}
 \tag{1.40}$$

Avec  $C = \cos \theta$  et  $S = \sin \theta$

## I.6.2 Expression des déformations dans le cadre de la théorie de plaques :

### I.6.2.1 Déformation d'une normale :

Dans les théories des plaques, on ramène le comportement des points de la plaque à celui de la surface moyenne et on suppose un champ de déplacement de premier degré selon la variable  $x_3$ .

[1]

$$\begin{aligned}
 u_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1(x_1, x_2, 0) + x_3\varphi_1(x_1, x_2) \\
 u_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2(x_1, x_2, 0) + x_3\varphi_2(x_1, x_2) \\
 u_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3(x_1, x_2, 0) + x_3\varphi_3(x_1, x_2)
 \end{aligned}
 \tag{1.41}$$

On notera  $u_1(x_1, x_2, 0) = u_1^0(x_1, x_2)$ , de même pour  $u_2(x_1, x_2, 0) = u_2^0(x_1, x_2)$  et  $u_3(x_1, x_2, 0) = u_3^0(x_1, x_2)$ . L'expression (1.41) devient :

$$\begin{aligned}
 u_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1^0(x_1, x_2) + x_3\varphi_1(x_1, x_2) \\
 u_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2^0(x_1, x_2) + x_3\varphi_2(x_1, x_2) \\
 u_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3^0(x_1, x_2)
 \end{aligned}
 \tag{1.42}$$

Remarque :

La conséquence de cette hypothèse est qu'une section droite reste droite (figure 1.7). En revanche, dans le cadre que nous nous sommes fixé, alors que dans la Théorie classique des plaques stratifiées, le cisaillement hors plan (transverse) est négligé ( $\gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$ ), ce qui se traduit par les conditions :

$$\varphi_1 = -\frac{\partial u_3^0}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad \varphi_2 = -\frac{\partial u_3^0}{\partial x_2} \quad 1.43$$

### I.6.2.2 Expression des déformations :

En appliquant, les équations (1.6) et (1.42) l'expression des déformations dévient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \\ \varepsilon_{33} &= 0 \\ \gamma_{12} &= 2\varepsilon_{12} = \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right) + x_3 \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \right) \end{aligned} \quad 1.44$$

Les équations (1.44) montrent que les déformations dans le plan de la plaque sont issues de deux contributions :

❖ Une déformation « en membrane » :

$$\varepsilon_m = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad 1.45$$

❖ Une déformation « en flexion et torsion » :

$$\varepsilon_f = x_3 \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad 1.46$$

On notera que dans la théorie classique des plaques stratifiées, les équations (1.43) et (1.46) donnent l'expression des déformations en flexion et torsion suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f = x_3 \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \end{bmatrix} = -x_3 \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \\ 2. \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2 \partial x_1} \end{bmatrix} \quad 1.47$$

La déformation totale est de la forme:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{mf} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{11}^0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{22}^0 \\ \boldsymbol{\gamma}_{12}^0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \end{bmatrix} \quad 1.48$$

### I.6.3 Expression des contraintes et des efforts résultants :

#### I.6.3.1 Expression des contraintes dans une couche :

Hypothèse de la théorie des plaques stratifiées :  $\sigma_{33} = 0$

L'utilisation des équations (1.37) et de la loi de comportement dans le cas d'un tissu ou d'un matériau unidirectionnel conduisent à l'expression :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{21} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{61} & Q'_{62} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c'_{44} & c'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & c'_{54} & c'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{bmatrix}_R \quad 1.49$$

$$\text{et} \quad \varepsilon_{33} = -\frac{1}{c_{33}}(c_{13}\varepsilon_{11} + c_{23}\varepsilon_{22} + c_{36}\gamma_{12})$$

Remarque :

- ❖ La relation (1.49) montre que bien que le problème soit plan,  $\varepsilon_{33}$  n'est pas nul.
- ❖ La discontinuité de la loi de comportement entre les couches implique la discontinuité des contraintes.

#### I.6.3.2 Expression des efforts résultants :

Les efforts auxquels est soumise la plaque sont donc les sommes des contraintes exercées sur chacune des n couches constituant la plaque. Ils sont représentés (figure 1.10).

Dans le plan de la plaque, les efforts normaux et tranchants sont :

$$N(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_k dx_3 \quad 1.50$$

En cisaillement:

$$Q(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} Q_{23} \\ Q_{13} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix}_k dx_3 \quad 1.51$$

De même, on définit les moments de flexion  $M_{11}$  et  $M_{22}$  et de torsion  $M_{12}$  :

$$M(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} x_3 \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_k dx_3 \quad 1.52$$

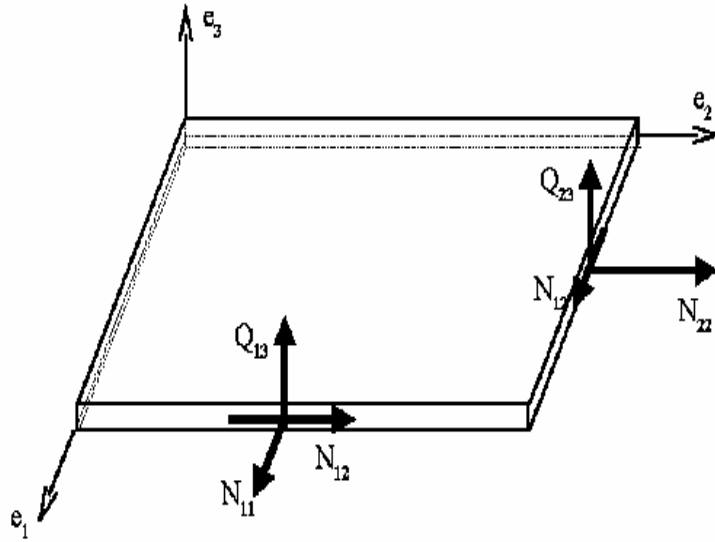


Figure 1.10 : Résultantes des efforts sur une plaque stratifiée

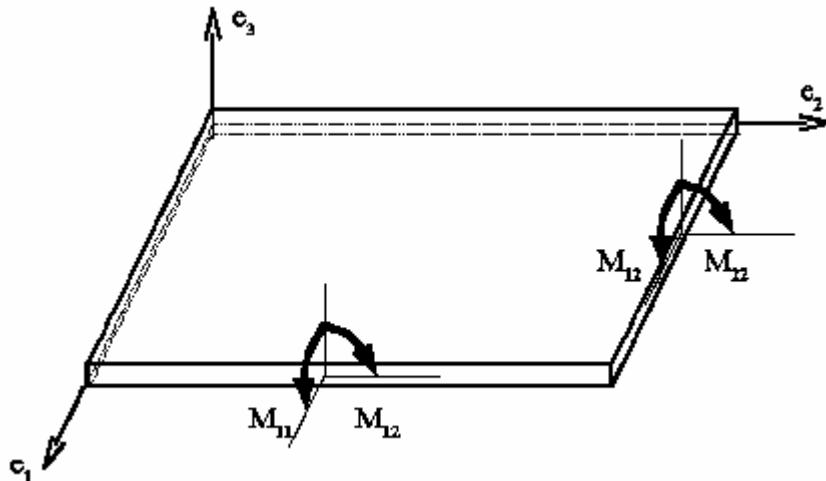


Figure 1.11 : Moments de flexion et de torsion

### I.6.4 Relations contraintes-déformation:

#### I.6.4.1 Expression contraintes-déformation pour une couche :

En combinant les équations (1.48) et (1.49), il est possible de réécrire la relation contrainte - déformation dans une couche sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_R^K = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_R^K \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^0 \\ \epsilon_{22}^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{bmatrix}_R^K + x_3 \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_R^K \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \end{bmatrix}_R^K$$

*et*

$$\begin{bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix}_R^K = \begin{bmatrix} c'_{44} & c'_{45} \\ c'_{45} & c'_{55} \end{bmatrix}_R^K \begin{bmatrix} \epsilon'_4 \\ \epsilon'_5 \end{bmatrix}_R^K$$
1.53

#### I.6.4.2 Résultantes en membrane :

En combinant les équations (1.50) et (1.53), il vient :

$$N(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q'_k \epsilon_m(x_1, x_2) + x_3 Q'_k k(x_1, x_2)] dx_3$$

$$N(x_1, x_2) = \left[ \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q'_k \right] \epsilon_m(x_1, x_2) + \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \right] k(x_1, x_2)$$
1.54

$$\text{soit } N(x_1, x_2) = A \epsilon_m(x_1, x_2) + B k(x_1, x_2)$$

En introduisant les matrices:

$$A = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q'_k$$

$$A = [A_{ij}] \text{ avec } A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (Q'_{ij})_k$$
1.55

$$B = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k$$

$$B = [B_{ij}] \text{ avec } B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) (Q'_{ij})_k$$
1.56

#### I.6.4.3 Moments de flexion et de torsion :

En combinant les équations (1.52) et (1.53), il vient :

$$M_f(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [x_3 Q'_k \epsilon_m(x_1, x_2) + x_3^2 Q'_k k(x_1, x_2)] dx_3$$

$$M_f(x_1, x_2) = \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \right] \epsilon_m(x_1, x_2) + \left[ \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q'_k \right] k(x_1, x_2)$$
1.57

$$\text{soit } M_f(x_1, x_2) = B \epsilon_m(x_1, x_2) + D k(x_1, x_2)$$



En introduisant les matrices:

$$D = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q'_k$$

$$D = [D_{ij}] \text{ avec } D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q'_{ij})_k \quad 1.58$$

#### I.6.4.4 Expression des résultantes dans le plan :

Selon la même méthode que ci-dessus, il est possible de combiner les équations (1.50) et (1.52) à l'équation (1.53) pour obtenir une relation entre les composantes du plan de la plaque (efforts et moments) et les déformations.

$$\begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^0 \\ \epsilon_{22}^0 \\ \gamma_{12}^0 \\ K_{11} \\ K_{22} \\ K_{12} \end{bmatrix} \quad 1.59$$

Avec:

- $A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (Q'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k$
- $B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) (Q'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k e_k z_k$
- $D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q'_{ij})_k = \sum_{k=1}^n (Q'_{ij})_k \left( e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12} \right)$

Les coefficients  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  et  $D_{ij}$  font apparaître les variables  $e_k$ , épaisseur du pli  $k$ , et  $z_k$  distance de la ligne moyenne du composite à la ligne moyenne du pli  $k$ .

#### Identification des différentes contributions :

- $A_{ij}$  constituent la matrice de rigidité en membrane
- $D_{ij}$  représentent la matrice de rigidité en flexion-torsion
- $B_{ij}$  sont les termes de couplage membrane/flexion-torsion

## Bibliographiques

- [1] J.M. Berthelot "Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures, 3ème édition " Paris : Editions Tec&Doc, 1999.
- [2] J. Molimard " Mécanique des Matériaux composites " EMSE 2004
- [3] N. Bahlouli "Cours Matériaux Composites" site: [www-ipst.ustrasbg.fr/nadia/courcomp/](http://www-ipst.ustrasbg.fr/nadia/courcomp/)
- [4] J.F. Imbert "Analyse des structures par éléments finis " cepadues-editions, Décembre 1984.
- [5] Franck Jedrzejewski " Introduction aux méthodes numériques" Deuxième édition Springer-Verlag France, Paris 2005



## Chapitre II

### Comportement dynamique des structures

II.1.Introduction:	25
II.2.Relation fondamentale de la dynamique:	25
II.3 Relation fondamentale de la dynamique appliquée à un élément de plaque:	25
II.3.1 Relation fondamentale relatives aux résultantes de membrane:	22
II.3.2 Relation fondamentale relatives aux résultantes de cisaillement:	27
II.3.3 Relation fondamentale relatives aux moments:	27
II.3.4 Résumé des relations fondamentales:	28
II.4 formulation énergétique de la théorie des stratifiés :	30
II.4.1 Introduction :	30
II.4.2 Energie de déformation d'un stratifié :	31
II.4.3 Energie cinétique d'un stratifié :	32
II.4.4 Travail des forces :	33
II.4.5. Equation d'équilibre dynamique:	33
Bibliographie	36

## II.1.Introduction

Ce chapitre constitue une introduction à la dynamique des structures. Une première partie y est consacrée au rappel les relations fondamentales de la dynamique des structures. On y expos le principe de "Hamilton" qui permet la caractérisation variationnelle des systèmes continus. Ensuite, on y montre comment l'étude dynamique d'une structure peut s'effectuer en cherchant des solutions approchées du système continu avec un nombre fini de degré de liberté.

## II.2 Relation fondamentale de la dynamique:

Si l'on pose que les efforts de volume exercés sur un solide (champ de gravité, de champ magnétique...) sont  $(f_1, f_2, f_3)$ , et si le repère choisi est galiléen, la relation fondamentale de la dynamique [1] s'écrit localement :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 &= \rho a_1 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 &= \rho a_2 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 &= \rho a_3\end{aligned}\tag{2.1}$$

Avec

$a_1, a_2, a_3$  Sont les composantes du vecteur accélération, et  $\rho$  est la masse volumique.

## II.3 Relation fondamentale de la dynamique appliquée à un élément de plaque:

### II.3.1 Relation fondamentale relatives aux résultantes de membrane:

L'intégration des équations (2.1), suivant l'épaisseur du stratifié, conduit aux relations fondamentales d'un élément de plaque, relatives aux résultantes. L'intégration des deux premières aboutit aux relations relatives aux résultantes de membrane.

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} f_1 dx_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_1 dx_3\tag{2.2}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dx_3 = \frac{\partial N_1}{\partial x_1}\tag{2.3}$$

De même:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} d x_3 = \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} d x_3 = \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} \quad 2.4$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} d x_3 = \sigma_{13} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{13} \left( -\frac{h}{2} \right) \quad 2.5$$

Où  $\sigma_{13} \left( \frac{h}{2} \right)$  et  $\sigma_{13} \left( -\frac{h}{2} \right)$  sont les contraintes éventuelles de cisaillement exercées sur les faces supérieure et inférieure du stratifié. Ces contraintes sont généralement nulles.

Enfin, nous poserons:

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_1 d x_3 = F_1 \quad 2.6$$

L'intégration du second membre nécessite les expressions (1.42) des déplacements en fonction de  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  et de  $t$ .

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_1 d x_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x_1, x_2, x_3) \left( \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} + x_3 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right) d x_3 \\ &= \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho d x_3 + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho x_3 d x_3 \end{aligned} \quad 2.7$$

En pose:

$$\rho_s = \int_{-h/2}^{h/2} \rho d x_3 \quad 2.8$$

La masse surfacique du stratifié :

$$R = \int_{-h/2}^{h/2} \rho x_3 d x_3 \quad 2.9$$

Soit:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \rho a_1 d x_3 = \rho_s \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \quad 2.10$$

L'intégration de la première équation (2.1) conduit donc finalement à:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} + F_1 + \sigma_{13} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{13} \left( -\frac{h}{2} \right) = \rho_s \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \quad 2.11$$

De même, l'intégrale de la deuxième équation (2.1) conduit à:

$$\frac{\partial N_2}{\partial x_2} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + F_2 + \sigma_{23} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{23} \left( -\frac{h}{2} \right) = \rho_s \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \quad 2.12$$

### II.3.2 Relation fondamentale relatives aux résultantes de cisaillement:

L'intégration suivant l'épaisseur de la troisième équation (2.1) conduit donc finalement à:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} f_3 dx_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_3 dx_3 \quad 2.13$$

Nous avons:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_3 = \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} \quad 2.14$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_3 = \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} \quad 2.15$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} dx_3 = \sigma_{33} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{33} \left( -\frac{h}{2} \right) \quad 2.16$$

Les contraintes  $\sigma_{33} \left( \frac{h}{2} \right)$  et  $\sigma_{33} \left( -\frac{h}{2} \right)$  apparaissent comme des forces de pressions exercées sur chaque

face de plaque. Nous notons leur différence:

$$q(x_1, x_2) = \sigma_{33} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{33} \left( -\frac{h}{2} \right) \quad 2.17$$

En fin:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \rho a_3 dx_3 = \rho_s \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial t^2} \quad 2.18$$

L'intégration de la troisième équation (2.1) conduit donc finalement à:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + F_3 + q = \rho_s \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial t^2} \quad 2.19$$

### II.3.3 Relation fondamentale relatives aux moments:

Les relations fondamentales relatives aux moments sont obtenues en multipliant par  $x_3$  les deux premières équations (2.1), puis en intégrant suivant l'épaisseur.

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} + \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} x_3 f_1 dx_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho x_3 a_1 dx_3 \quad 2.20$$

En intégrant par parties, nous avons:

$$\int_{-h/2}^{h/2} x_3 \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} dx_3 = [x_3 \sigma_{13}]_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_3 = \frac{h}{2} \sigma_{13} \left( \frac{h}{2} \right) + \frac{h}{2} \sigma_{13} \left( -\frac{h}{2} \right) - Q_1 \quad 2.21$$

Soit:

$$\int_{-h/2}^{h/2} x_3 \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} dx_3 = \frac{h}{2} \left( \sigma_{13} \left( \frac{h}{2} \right) + \sigma_{13} \left( -\frac{h}{2} \right) \right) - Q_1 \quad 2.22$$

Le second membre s'écrit:

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \rho x_3 a_1 dx_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho x_3 \left( \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} + x_3 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right) dx_3 \\ &= \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho x_3 dx_3 + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho x_3^2 dx_3 \end{aligned} \quad 2.23$$

En pose:

$$I_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho x_3^2 dx_3 \quad 2.24$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} x_3 f_1 dx_3 = P_x \quad 2.25$$

$I_{12}$  est le moment d'inertie par rapport au plan moyen (0, 1, 2) de l'élément de plaque.

La première relation des moments s'écrit donc:

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} + \frac{h}{2} \left( \sigma_{13} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{13} \left( -\frac{h}{2} \right) \right) + P_1 - Q_1 = R \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} + I_{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \quad 2.26$$

De même, la deuxième équation (2.1) conduit à:

$$\frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{h}{2} \left( \sigma_{23} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{23} \left( -\frac{h}{2} \right) \right) + P_2 - Q_2 = R \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial t^2} + I_{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \quad 2.27$$

II.3.4 Résumé des relations fondamentales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} + F_1 + \sigma_{13} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{13} \left( -\frac{h}{2} \right) &= \rho_s \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x_2} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + F_2 + \sigma_{23} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{23} \left( -\frac{h}{2} \right) &= \rho_s \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + F_3 + q &= \rho_s \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial t^2} \end{aligned} \quad 2.28$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} + \frac{h}{2} \left( \sigma_{13} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{13} \left( -\frac{h}{2} \right) \right) + P_1 - Q_1 = R \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} + I_{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{h}{2} \left( \sigma_{23} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{23} \left( -\frac{h}{2} \right) \right) + P_2 - Q_2 = R \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial t^2} + I_{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}$$



Avec:

$$\rho_s, R, I_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} (1, x_3, x_3^2) \rho \, dx_3 \quad 2.29$$

Les trois dernières équations permettent d'obtenir une relation indépendante des résultantes de cisaillement suivant:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + q \\ = \rho_s \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial t^2} + R \left( \frac{\partial^3 u_1^0}{\partial x_1 \partial t^2} + \frac{\partial^3 u_2^0}{\partial x_2 \partial t^2} \right) + I_{12} \left( \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x_1 \partial t^2} + \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial x_2 \partial t^2} \right) \end{aligned} \quad 2.30$$

Les équations (2.28), (2.30) constituent les équations de mouvement de la théorie classique des plaques. Elles sont applicables aussi bien à des plaques homogènes qu'à des plaques stratifiées. Les deux premières équations (2.28), associées à (2.30), constituent les équations fondamentales des plaques en l'absence de cisaillement transverse, soit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} + F_1 + \sigma_{13} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{13} \left( -\frac{h}{2} \right) &= \rho_s \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x_2} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + F_2 + \sigma_{23} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{23} \left( -\frac{h}{2} \right) &= \rho_s \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + q &= \rho_s \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial t^2} + R \left( \frac{\partial^3 u_1^0}{\partial x_1 \partial t^2} + \frac{\partial^3 u_2^0}{\partial x_2 \partial t^2} \right) + I_{12} \left( \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x_1 \partial t^2} + \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial x_2 \partial t^2} \right) \end{aligned} \quad 2.31$$

Les grandeurs  $\rho_s, R, I_{12}$  se calculent sans difficulté dans le cas où la plaque est constituée de  $n$  couches, la couche  $k$  ayant une masse volumique  $\rho_k$ . Nous avons:

$$\begin{aligned} \rho_s &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho \, dx_3 = \sum_{k=1}^n \int_{-h/2}^{h/2} \rho_k \, dx_3 \\ \text{soit } \rho_s &= \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k - h_{k-1}) \end{aligned} \quad 2.32$$

De même:

$$R = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad 2.33$$

$$I_{12} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad 2.34$$

Les relation fondamentale de la théorie classique des stratifiés sont obtenues en introduisant l'équation constitutive (1.59) des stratifiés dans la relation (2.31) dans le cas de problèmes de dynamique, puis en tenant compte des expressions (1.44) liant les déformations aux déplacements, nous obtenons les trois relations fondamentales de la théorie classique des stratifiés :

$$\begin{aligned}
& A_{11} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1 \partial x_2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_2^2} + A_{16} \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_1^2} \\
& + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_1 \partial x_2} + A_{26} \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_2^2} - B_{11} \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x_1^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x_1^2 \partial x_2} \\
& - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2^2} - B_{26} \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x_2^3} + F_1 + \sigma_{13} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{13} \left( -\frac{h}{2} \right) = \rho_s \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
& A_{16} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1 \partial x_2} + A_{26} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_2^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_1^2} \\
& + 2A_{26} \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_1 \partial x_2} + A_{22} \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_2^2} - B_{16} \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x_1^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x_1^2 \partial x_2} \\
& - 3B_{26} \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2^2} - B_{22} \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x_2^3} + F_2 + \sigma_{23} \left( \frac{h}{2} \right) - \sigma_{23} \left( -\frac{h}{2} \right) = \rho_s \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
& D_{11} \frac{\partial^4 u_3^0}{\partial x_1^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 u_3^0}{\partial x_1^3 \partial x_2} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 u_3^0}{\partial x_2^2 \partial x_1^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2^3} \\
& + D_{22} \frac{\partial^4 u_3^0}{\partial x_2^4} - B_{11} \frac{\partial^3 u_1^0}{\partial x_1^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u_1^0}{\partial x_1^2 \partial x_2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_1^0}{\partial x_1 \partial x_2^2} \\
& - B_{26} \frac{\partial^3 u_1^0}{\partial x_2^3} - B_{16} \frac{\partial^3 u_2^0}{\partial x_1^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_2^0}{\partial x_1^2 \partial x_2} - 3B_{26} \frac{\partial^3 u_2^0}{\partial x_1 \partial x_2^2} \\
& - B_{22} \frac{\partial^3 u_2^0}{\partial x_2^3} + q = \rho_s \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial t^2} + R \left( \frac{\partial^3 u_1^0}{\partial x_1 \partial t^2} + \frac{\partial^3 u_2^0}{\partial x_2 \partial t^2} \right) + I_{12} \left( \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x_1 \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial x_2 \partial t^2} \right)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

## II.4 formulation énergétique de la théorie des stratifiés :

### II.4.1 Introduction :

Les théorèmes de l'énergie peuvent être utilisés pour aboutir à une formulation variationnelle des relations fondamentales des stratifiés. Les théorèmes de l'énergie sont également à la base de l'analyse des stratifiés par la méthode des éléments finis.

## II.4.2 Energie de déformation d'un stratifié :

L'énergie de déformation d'un solide élastique s'écrit en coordonnées cartésiennes suivants [1] :

$$U_d = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv$$

$$U_d = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{33} \varepsilon_{33} + \sigma_{13} \gamma_{13} + \sigma_{23} \gamma_{23} + \sigma_{12} \gamma_{12}) dx_1 dx_2 dx_3 \quad 2.38$$

En tenant compte des hypothèses de la théorie des stratifiés :  $\sigma_{33} = 0$ ,  $\gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$

Cette relation peut être exprimée en fonction des déplacements  $u_1^0$ ,  $u_2^0$  et  $u_3^0$  :

$$U_d = \frac{1}{2} \iint \left\{ A_{11} \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} + A_{22} \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} \right)^2 \right. \\ + 2 \left( A_{16} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + A_{26} \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} \right) \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right) + A_{66} \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right)^2 \\ - B_{11} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} - 2B_{12} \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \right) \\ - B_{22} \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} - 2B_{16} \left[ \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right) + 2 \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \\ - 2B_{26} \left[ \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right) + 2 \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \\ - 4B_{66} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right) + D_{11} \left( \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \\ + D_{22} \left( \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \right)^2 + 4 \left( D_{16} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} + D_{26} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \left. + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right\} dx_1 dx_2 \quad 2.39$$

Dans le cas de stratifiés symétriques, les termes  $B_{ij}$  de couplage membrane-flexion sont nuls, et l'expression (2.39) de l'énergie de déformation apparaît comme la somme de deux termes : l'un fonction uniquement des déplacements  $u_1^0$  et  $u_2^0$  de membrane, l'autre fonction uniquement des déplacements transverse  $u_3^0$ .

$$\begin{aligned}
U_d = & \frac{1}{2} \iint \left\{ A_{11} \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} + A_{22} \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} \right)^2 \right. \\
& + 2 \left( A_{16} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + A_{26} \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} \right) \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right) + A_{66} \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right)^2 \left. \right\} dx_1 dx_2 \\
& + \frac{1}{2} \iint \left\{ D_{11} \left( \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \right)^2 \right. \\
& + 4 \left( D_{16} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} + D_{26} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \left. \right\} dx_1 dx_2
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Dans le cas de problèmes de flexion pure, le premier terme est réduit à une constante  $C$ , et l'énergie de déformation s'écrit suivant :

$$\begin{aligned}
U_d = & \frac{1}{2} \iint \left\{ D_{11} \left( \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \right)^2 \right. \\
& + 4 \left( D_{16} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} + D_{26} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \left. \right\} dx_1 dx_2 + C
\end{aligned} \tag{2.41}$$

### II.4.3 Energie cinétique d'un stratifié :

L'énergie cinétique d'un solide en mouvement [1] :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} dv \tag{2.42}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial t} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 dx_3 \tag{2.43}$$

Où  $\rho$  est la masse volumique en un point et l'intégration est étendue à l'ensemble du solide.

Dans le cas de la théorie classique des stratifiés, le champ des déplacements (1.42) s'écrit :

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_1^0 - x_3 \frac{\partial u_3^0}{\partial x_1} \\
u_2 &= u_2^0 - x_3 \frac{\partial u_3^0}{\partial x_2} \\
u_3 &= u_3^0(x_1, x_2)
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Où  $u_3^0$  est indépendant de  $x_3$ . En substituant ces relations dans l'expression (2.43), l'énergie cinétique du stratifié s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[ \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial t} - x_3 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial t} - x_3 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2 \partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3^0}{\partial t} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 dx_3 \tag{2.45}$$

## II.4.4 Travail des forces :

$$w = w_v + w_s$$

Travail des forces volumiques :

$$w_v = \int_V f_{vi} u_i dv$$

Travail des forces surfaciques:

$$w_s = \int_S f_{si} u_i ds$$

## II.4.5. Equation d'équilibre dynamique:

Il existe aussi une manière variationnelle d'écrire cet équilibre, c'est le principe de Hamilton qui s'énonce comme suit:

**Principe de Hamilton:**

Si  $E_c$  est l'énergie cinétique,  $E_p$  l'énergie potentielle total, entre les temps  $t_1$  et  $t_2$  le mouvement d'un corps élastique conservatif s'effectue de telle manière que la fonctionnelle

$$\int_{t_1}^{t_2} (E_c - E_p) dt \quad \text{soit stationnaire} \Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} (E_c - E_p) dt = 0 \quad 2.46$$

L'énergie potentielle totale  $E_p$  est la somme de l'énergie de déformation  $U_d$  et de travail conservatives des forces surfaciques et volumiques:

$$E_p = U_d - w = U_d - w_v - w_s \quad 2.47$$

La fonction  $E_c - E_p$  est appelée lagrangienne, elle est notée  $L$ .

Si  $L$  est une fonction d'espace et du temps sont séparées  $L = L(\dot{u}_i, u_i, t)$

Donc pour les systèmes conservatives, le principe de Hamilton s'énonce alors simplement:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{u}_i, u_i, t) dt = 0 \quad 2.48$$

Alors l'équation d'Euler associée à la fonctionnelle s'écrit [4,5]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0 \quad 2.49$$

Ou encore:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial u_i} + \frac{\partial E_p}{\partial u_i} = 0 \quad 2.50$$

Ou:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial u_i} + \frac{\partial U_d}{\partial u_i} = Q_i \quad 2.51$$

Avec  $Q_i$  force généralisée correspondant à la coordonnée  $u_i$  et définie par le travail virtuel des forces extérieures:

$$\delta w = Q_i \delta u_i \quad 2.52$$

Pour les systèmes non conservatifs, le principe de Hamilton devient:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{u}_i, u_i, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta w^* dt = 0 \quad 2.53$$

Avec:

$$\delta w = Q_i^* \delta u_i \quad 2.54$$

Les équations de Lagrange s'écrivent alors:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_i} - Q_i^* = 0 \quad 2.55$$

Ou:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial u_i} + \frac{\partial U_d}{\partial u_i} = Q_i + Q_i^* \quad 2.56$$

**Remarque:** pour les systèmes avec amortissement, le terme additionnel  $-Q_i^*$  représente la force généralisée de dissipation.

Les équations de Lagrange permettent d'obtenir les équations de mouvement du système à partir des expressions des énergies cinétique, potentielle et de dissipation.

Les équations de Lagrange d'un système conservative deviennent alors:

$$M \ddot{q} + k q = F(t) \quad 2.57$$

Dans le cas d'un système avec amortissement visqueuse, il faut ajouter au second membre leur terme additionnel de force de dissipation visqueuse.

$$M \ddot{q} + c \dot{q} + k q = F(t) \quad 2.58$$

La solution de ce système peut s'obtenir à partir de l'étude des vibrations libres, c'est-à-dire par la superposition de solutions du système sans second membre, soit:

$$M \ddot{q} + k q = 0 \quad 2.59$$

Les solutions sont harmoniques du type  $q = q e^{i\omega t}$ :

$$e^{i\omega t} (k - \omega^2 M) q = 0 \quad 2.60$$

Le déterminant de l'équation (2.60) doit être nul:

$$\det([k] - \omega^2 [M]) = 0 \quad 2.61$$

On obtient ainsi les  $n$  valeurs  $\omega^2(\omega_i, i = 1, \dots, n)$  pour une dimension  $n$  des matrices  $[K]$  et  $[M]$ .

## Bibliographiques

- [1] J.M. Berthelot "Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures, 3ème édition " Paris : Editions Tec&Doc, 1999.
- [4] J.F. Imbert "Analyse des structures par éléments finis " cepadues-editions, Décembre 1984.
- [5] Franck Jedrzejewski " Introduction aux méthodes numériques" Deuxième édition Springer-Verlag France, Paris 2005.





## **PARTIE 2**

# **MODELISATION ET PROGRAMMATION**



# Chapitre III

## Formulation par la méthode des éléments finis et programmation

III.1 Introduction:	37
III.2. Formulation mathématique:	38
III.3 Formulation par éléments finis :	39
III.3.1 Formulation élémentaire:	42
III.3.2 Formulation globale:	44
III.3.2.1 Assemblage:	44
III.4 Programmation:	45
III.4.1 Introduction:	45
III.4.2 Organisation du programme:	45
Bibliographiques:	52

### III.1 Introduction :

La méthode des éléments finis est un outil de résolution numérique approchée des équations différentielles. Qui régissent les phénomènes physiques.

L'idée générale de la méthode des éléments finis consiste à la discrétisation d'un milieu contenu par des éléments qui sont entre eux liés par des lignes appelées lignes nodales. Les lieux de rencontre des lignes nodales s'appellent noeuds.

À l'intérieur de chaque élément, on définit une fonction d'approximation appelée fonction d'interpolation exprimée en fonction des variables nodales, ces dernières définissent le comportement local de l'élément. Par conséquent, leur groupement ou assemblage définit le comportement global de la structure.

La méthode des éléments finis est extrêmement puissante puisqu'elle permet d'étudier correctement des structures contenues ayant diverses propriétés géométriques et différentes conditions aux limites, elle nécessite alors un grand nombre de calculs qui, à cause de leur nature répétitive, s'adapte parfaitement à la programmation numérique et la résolution par ordinateur.

Les structures minces sont celles dont la normale reste rectiligne et perpendiculaire à la référence géométrique en configuration déformée du comportement flexionnel. Ici, on considère avant tout

- Les poutres de Bernoulli.
- Les plaques de Kirchhoff.

En conséquence, les déformations de cisaillement transverses sont négligées.

La qualification mince est correcte : plus l'élément est élancé (rapport  $a/h$  grand) (figure 3.1).

### III.2. Formulation mathématique :

Une plaque stratifiée rectangulaire mince consiste de  $n$  plis orientés différemment de dimension  $a$  et  $b$  est considérée (figure 3.1). Le système d'axes  $(x_1, x_2, x_3)$  passe par la surface moyenne de cette plaque.

Dans la théorie de plaques, on ramène le comportement des points de la plaque à celui de la surface moyenne et on suppose un champ de déplacement du premier degré

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3, t) &= u_1^0(x_1, x_2, t) + x_3 \varphi_1(x_1, x_2, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) &= u_2^0(x_1, x_2, t) + x_3 \varphi_2(x_1, x_2, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) &= u_3^0(x_1, x_2, t) \end{aligned} \quad 3.1$$

Où

$u_1, u_2, u_3$  sont respectivement les déplacements suivant les directions  $x_1, x_2, x_3$ .

$u_1^0, u_2^0, u_3^0$  sont les déplacements d'un point situé sur la surface moyenne de la plaque, respectivement suivent les directions  $x_1, x_2, x_3$ .

$\varphi_1, \varphi_2$  sont respectivement les rotations de normale à la surface moyenne autour des axes  $x_1, x_2$ .

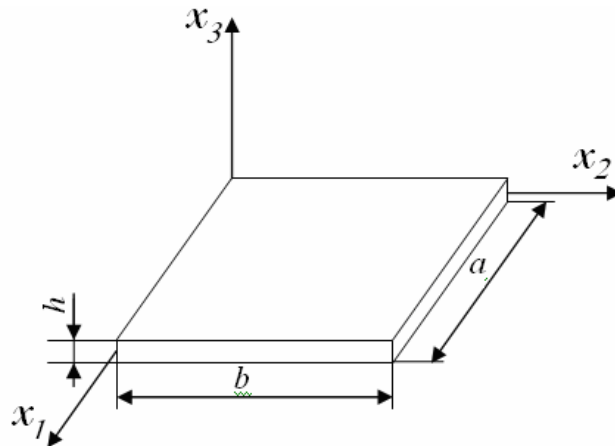


Figure 3.1: Schéma géométrique d'une plaque (stratifiée)

### III.3 Formulation par éléments finis :

L'analyse est basée sur un élément rectangulaire à 4 nœuds de famille de Hermite, chaque nœud possède 3 degrés de liberté; un déplacements  $u_3$  et deux rotations  $\varphi_1, \varphi_2$  le champ de déplacements élémentaire est défini par l'expression:

$$u_3 = w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad 3.2$$

Le champ de déplacements sous forme matricielle peut être résumée par l'équation générale:

$$u_3 = w = [p_x] \{\alpha\} \quad 3.3$$

Avec

$$[p_x] = (1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2 y, xy^2, y^3, x^3 y, xy^3) \quad 3.4$$

$$\text{et } \{\alpha\}^t = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}\}$$

En remplaçant par leur valeur les coordonnées nodales dans l'équation (3.3):

$$\{u^e\} = [x] \{\alpha\} \Rightarrow \{\alpha\} = [x]^{-1} \{u^e\} \quad 3.5$$

Avec

$$[x] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & a^3 & 3ab^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 & 3a^2 & 2ab & b^2 & 0 & 3a^2 b & b^3 \\ 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2 b & ab^2 & b^3 & a^3 b & ab^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & b^3 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc:

$$u_3 = [p_x] [x]^{-1} \{u^e\} \quad 3.6$$

En pose :

$$[N] = [p_x] [x]^{-1} \Rightarrow u_3 = [N] \{u^e\} \quad 3.7$$

Les fonctions de forme  $N$  sont schématisées sur les graphes suivants:

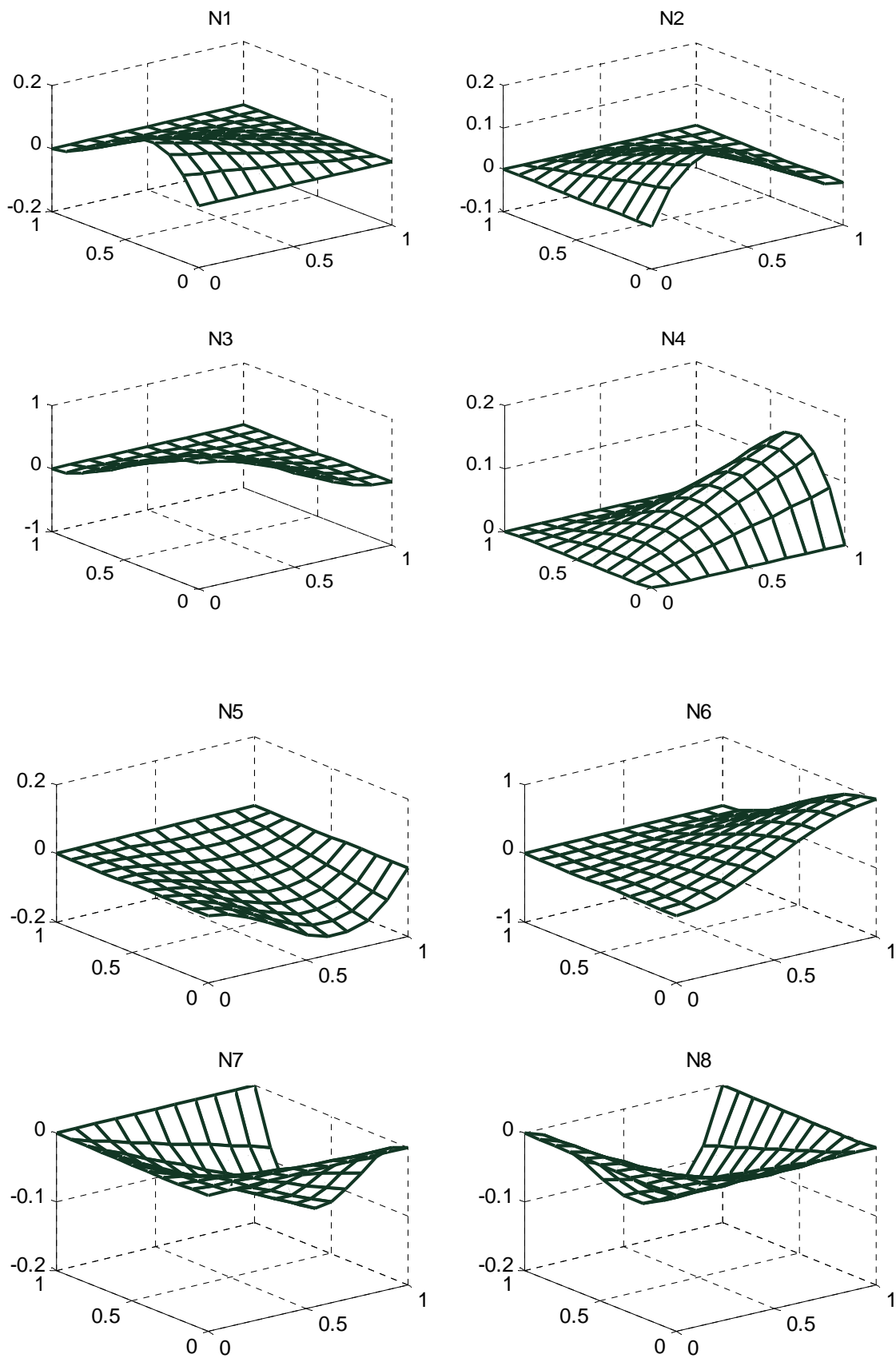


Figure 3.2: Les fonctions de forme



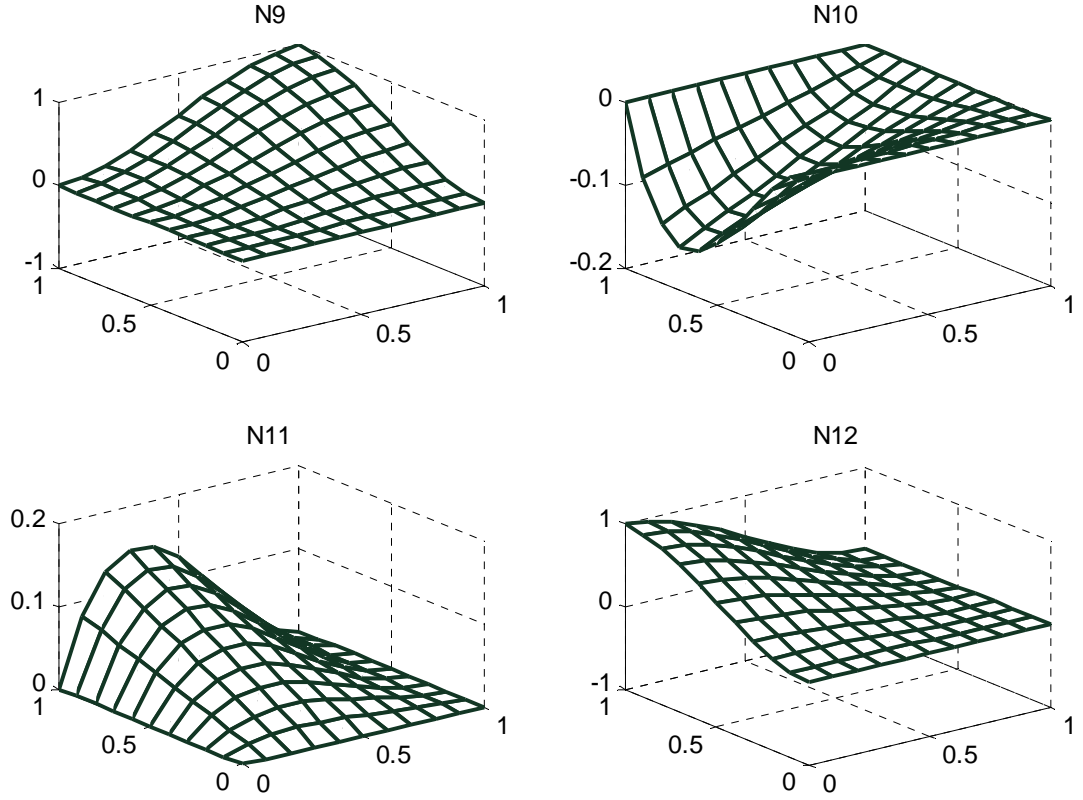


Figure 3.2: Les fonctions de forme

Dans le cas d'un problème de flexion des plaques, l'état des déformations en chaque point peut être représenté par trois composantes:

- La courbure dans la direction  $x_1$
- La courbure dans la direction  $x_2$
- La torsion

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_f = x_3 \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \end{bmatrix} &= -x_3 \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \\
 &= x_3 \{k\} = -x_3 [L] \{\varphi\}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Et:

$$\varphi_1 = \theta_2 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1}; \quad \varphi_2 = -\theta_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \tag{3.9}$$

Donc:

$$\begin{Bmatrix} \phi 1 \\ \phi 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \nabla u_3 \quad 3.10$$

En remplaçant  $u_3$  par sa valeur à partir de l'équation (3.6):

$$\varepsilon_f = -x_3 L \nabla u_3 = -x_3 L \nabla [p_x] [x]^{-1} \{u^e\} = -x_3 L \nabla N \{u^e\} \quad 3.11$$

On pose:

$$C = L \nabla [p_x] \quad 3.12$$

Avec :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} \quad 3.13$$

Et:

$$\beta = C[x]^{-1} \quad 3.14$$

Donc:

$$\varepsilon_f = x_3 \{k\} = -x_3 [\beta] \{u^e\} \Rightarrow \{k\} = -[\beta] \{u^e\} \quad 3.15$$

### III.3.1 Formulation élémentaire:

La formulation au niveau de l'élément consiste à exprimer les énergies cinétique et potentielle en fonction respectivement des vitesses et des déplacements aux nœuds.

- La matrice de rigidité:

On rappelle de l'énergie potentielle totale à partir de l'équation (2.47):

L'énergie potentielle totale  $E_p$  est la somme de l'énergie de déformation  $U_d$  et de travail conservatives des forces, donne l'étude des vibrations libres le travail des forces égal à zéro. Donc l'énergie potentielle totale  $E_p$  égal l'énergie de déformation  $U_d$ , équation (2.41) :

$$\begin{aligned} E_p = U_d = & \frac{1}{2} \iint \left\{ D_{11} \left( \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \right)^2 \right. \\ & \left. + 4 \left( D_{16} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} + D_{26} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right\} dx_1 dx_2 + C \end{aligned} \quad 3.16$$

En écrit l'équation (3.16) sous forme matricielle :

$$E_p = U_d = \frac{1}{2} \iint \{k\}^T [D] \{k\} dx_1 dx_2 + c \quad 3.17$$

En remplace  $\{k\}$  par l'équation (3.15)

$$E_p = \frac{1}{2} \int \int \{u^e\}^t [\beta]^t [D][\beta] \{u^e\} dx_1 dx_2 + c \quad 3.18$$

D'autre part l'énergie potentielle s'écrit [4,6]:

$$E_p = \frac{1}{2} \int \int \{u^e\}^t [k] \{u^e\} dx_1 dx_2 + c \quad 3.19$$

Par analogie, la matrice de rigidité élémentaire est:

$$[k^e] = \int_0^b \int_0^a [\beta]^t [D][\beta] dx_1 dx_2 \quad 3.20$$

En remplaçant  $\beta$  par l'expression (3.14)

$$[k^e] = ([x]^{-1})^t \left( \int_0^b \int_0^a [C]^t [D][C] dx_1 dx_2 \right) [x]^{-1} \quad 3.21$$

- Modélisation des masses par éléments finis:

L'énergie cinétique de l'élément, équation (2.42) :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_v \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} dv \quad 3.22$$

Mais par ailleurs on a:

$$\begin{aligned} \{u_3\} &= [N] \{u^e\} \\ &= [p_x][x]^{-1} \{u^e\} \end{aligned} \quad 3.23$$

D'où:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \int_v \rho [N]^t \frac{\partial \{u^e\}}{\partial t} [N] \frac{\partial \{u^e\}}{\partial t} dv \\ &= \frac{1}{2} \{\dot{u}^e\}^t \left( \int_v \rho [N]^t [N] dv \right) \{\dot{u}^e\} \end{aligned} \quad 3.24$$

D'autre part l'énergie cinétique s'écrit [4,6]:

$$E_c = \frac{1}{2} \{\dot{u}^e\}^t [M^e] \{\dot{u}^e\} \quad 3.25$$

Par analogie la matrice de masse cohérente de l'élément est:

$$\begin{aligned} [M^e] &= \int_v \rho [N]^t [N] dv \\ &= \int_v \rho [p_x]^t ([x]^{-1})^t [p_x][x]^{-1} dv \end{aligned} \quad 3.26$$

### III.3.2 Formulation globale:

#### III.3.2.1 Assemblage:

La matrice de rigidité et de masse élémentaire sont utilisées pour calculer la matrice de rigidité et de masse de la structure complète permettant d'exprimer l'énergie cinétique et potentielle en fonction des déplacements nodaux de la structure.

#### Approche énergétique:

Si les éléments ont la compatibilité requise, l'énergie cinétique et potentielle totale de la structure peut être obtenue par sommation des énergies cinétiques et potentielles totales élémentaires, soit:

$$E_c = \sum_{\text{éléments}} E_c^e = \sum_{\text{éléments}} \frac{1}{2} \{\dot{u}^e\}^t [M^e] \{\dot{u}^e\} = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^t [M] \{\dot{u}\} \quad 3.27$$

$$E_p = \sum_{\text{éléments}} E_p^e = \sum_{\text{éléments}} \frac{1}{2} \{u^e\}^t [k^e] \{u^e\} - \{u^e\}^t \{F^e\} = \frac{1}{2} \{u\}^t [K] \{u\} - \{u\}^t \{F\} \quad 3.28$$

Soit  $u$  le vecteur des déplacements nodaux de la structure:

La compatibilité des déplacements nodaux de la structure est obtenue en écrivant pour chaque élément une relation matricielle de type:

$$u^e = \beta^e . u \quad 3.29$$

Avec:

$\beta^e$  matrice de localisation ou de connectivité géométrique.

Chaque relation (3.29) permet de repérer ou de localiser les d. d. l. de chaque élément dans l'ensemble des d. d. l. de la structure.

En utilisant les relations (3.27) et (3.28), on peut écrire:

$$E_c = \sum_{\text{éléments}} E_c^e = \sum_{\text{éléments}} \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^t [\beta^e]^t [M^e] \{\dot{u}\} [\beta^e] = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^t [M] \{\dot{u}\} \quad 3.30$$

La matrice de masse de la structure complète est:

$$[M] = \sum_{\text{éléments}} [\beta^e]^t [M^e] [\beta^e] \quad 3.31$$

De même pour la matrice de rigidité globale et le vecteur des forces équivalentes:

$$[k] = \sum_{\text{éléments}} [\beta^e]^t [k^e] [\beta^e] \quad 3.32$$

$$[F] = \sum_{\text{éléments}} [\beta^e]^t [F^e] \quad 3.33$$

### III.4 Programmation:

#### III.4.1 Introduction:

On a développé dans le présent chapitre les étapes nécessaires à l'obtention de matrice masse et de rigidité de l'élément. La résolution d'un problème par la méthode des éléments finis entraîne le calcul de la matrice de masse et de rigidité de toute la structure.

On a vu au chapitre précédant que les valeurs propres de la structure étaient reliés aux matrices de masse et de rigidité par l'équation (2.60)

$$(k - \omega^2 M)q = 0 \quad 3.34$$

Dans cette méthode, les quantités inconnues sont les pulsations propres et les modes propres de la structure.

Le travail numérique consiste en la mise en œuvre de cette étude pour les plaques minces. On donne dans ce travail une technique à adopter lorsque l'on développe ces programmes sur ordinateur. Ce dernier peut être construits en un grand nombre de parties appelées sous-programmes, chacun d'eux ayant une fonction particulière dans l'étude complète.

Un exemple évident est le sous-programme écrit pour la résolution du système d'équations représenté par l'équation (3.34). Il est aussi nécessaire d'avoir un programme principal qui contrôle les ordres et utilise les différents sous-programmes.

Le langage de programmation à utiliser est le FORTRON90 .

#### III.4.2 Organisation du programme:

La figure 3.3 résume les parties de base du programme pour la résolution complète d'un problème par la méthode des éléments finis. L'étude s'effectue en utilisant une introduction des données qui décrivent complètement la structure modélisé et en effectuant des sorties qui consistent en la tabulation des valeurs propres et des déformations modales. On va maintenant décrire séparément chaque étape de la figure 3.3.

##### 1. Entrées des données:

Pour poser le problème, il est nécessaire d'introduire des données; ces dernières doivent spécifier les caractéristiques expérimentales des couches, le nombre des couches, les orientations et les épaisseurs des couches, le nombre et les dimensions des éléments, la masse volumique et la connectivité géométrique des éléments et en fin les conditions aux limites.

## 2. Caractérisation du matériau composite stratifié:

Le programme contient un sous-programme pour calcul de la matrice de rigidité et de souplesse qui sera utilisé pour calcul les matrices de rigidité en membrane  $[A]$ , de rigidité en flexion-torsion  $[D]$  et de couplage membrane/flexion-torsion  $[B]$

## 3. Matrice de rigidité et de masse de l'élément :

Le sous-programme dans lequel la matrice de rigidité et de masse de l'élément  $[k^e]$  et  $[M^e]$  est calculée nécessite un certain nombre d'informations qui sont incluses dans les données initiales, les coordonnées nodales et les propriétés de l'élément ; des qu'elles ont été lues par le programme principale, on peut calculer  $[k^e]$  et  $[M^e]$  pour chaque élément. Le sous-programme contient l'expression algébrique des termes de  $[k^e]$  et  $[M^e]$ , en effectuant les multiplications matricielles nécessaires pour obtenir les termes  $[k^e]$  et  $[M^e]$  comme cela est indiqué par les équations (3.21) et (3.26)

## 4. Assemblage de la matrice de rigidité et de masse de la structure :

La matrice de rigidité et de masse élémentaire sont utilisées pour calculer la matrice de rigidité et de masse de la structure complète permettant d'exprimer les localisations ou les connectivités géométriques des éléments.

## 5. Introduction des conditions aux limites :

En générale, la structure s'appuie sur plusieurs nœuds pour lesquels certains déplacements sont interdits, il est nécessaire d'enlever les lignes et les colonnes appropriées des matrices de rigidité et de masse globale ; c'est-à-dire on élimine les lignes et les colonnes correspondant aux déplacement fixés.

## 6. Obtention des fréquences propres et des déformations modales :

Pour tous, si ce n'est pour le plus trivial des problèmes, l'ensemble final d'équations sera grand. Il existe plusieurs schémas pour résoudre de gros systèmes d'équations et parmi ceux qui ont été utilisés avec succès en conjonction avec la méthode des éléments finis, on peut citer la méthode de Cholesky. L'équation (3.34) sera résolu pour donner les fréquences propres et les déformations modales à l'aide de la logicielle MATLAB.

## 7. Présentation des résultats :

Il est habituel d'imprimer les données dans un fichais d'entrée, à la fois pour vérification et interpréter les résultats. De plus, on doit imprimer les valeurs des fréquences propres et schématiser les modes propres.

## III.4.2 Organigramme:

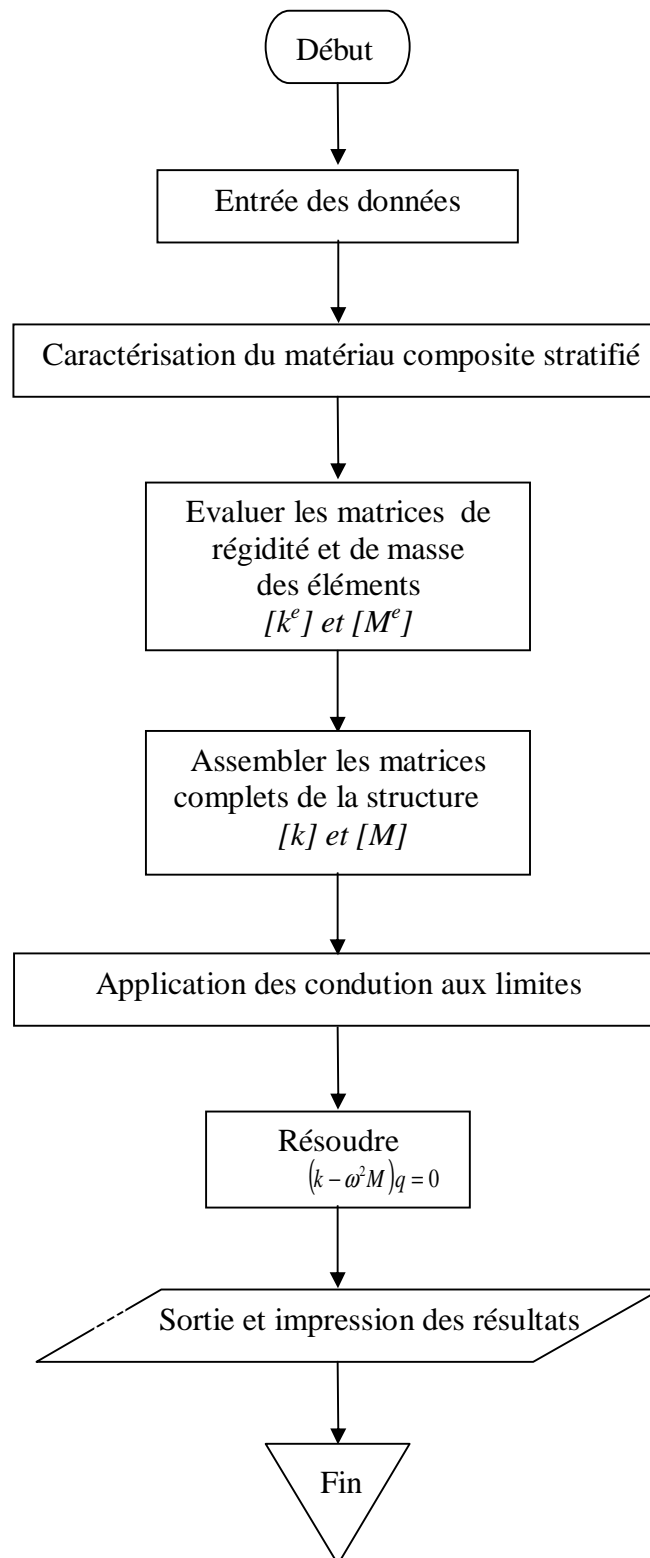
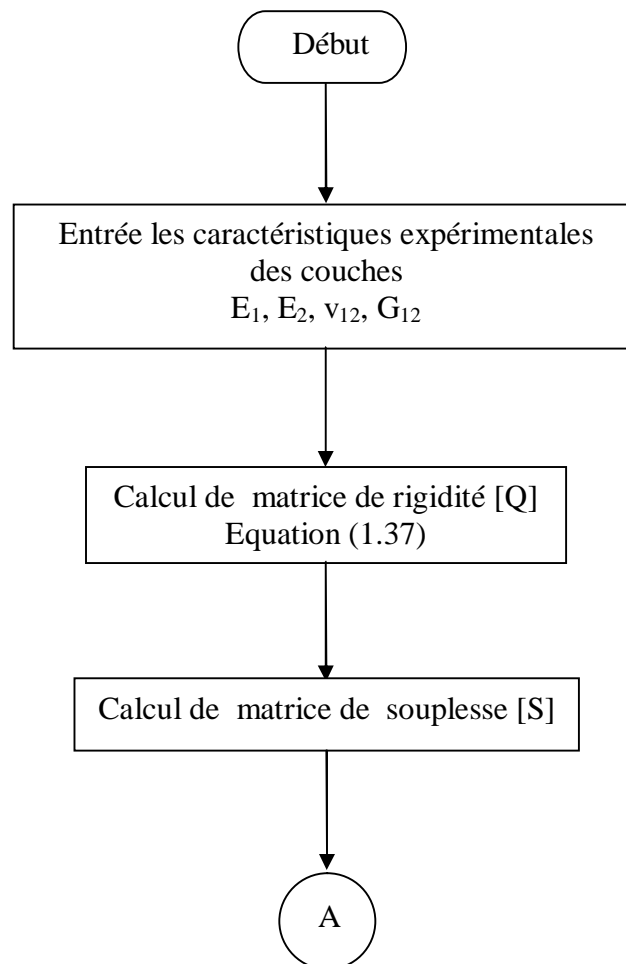
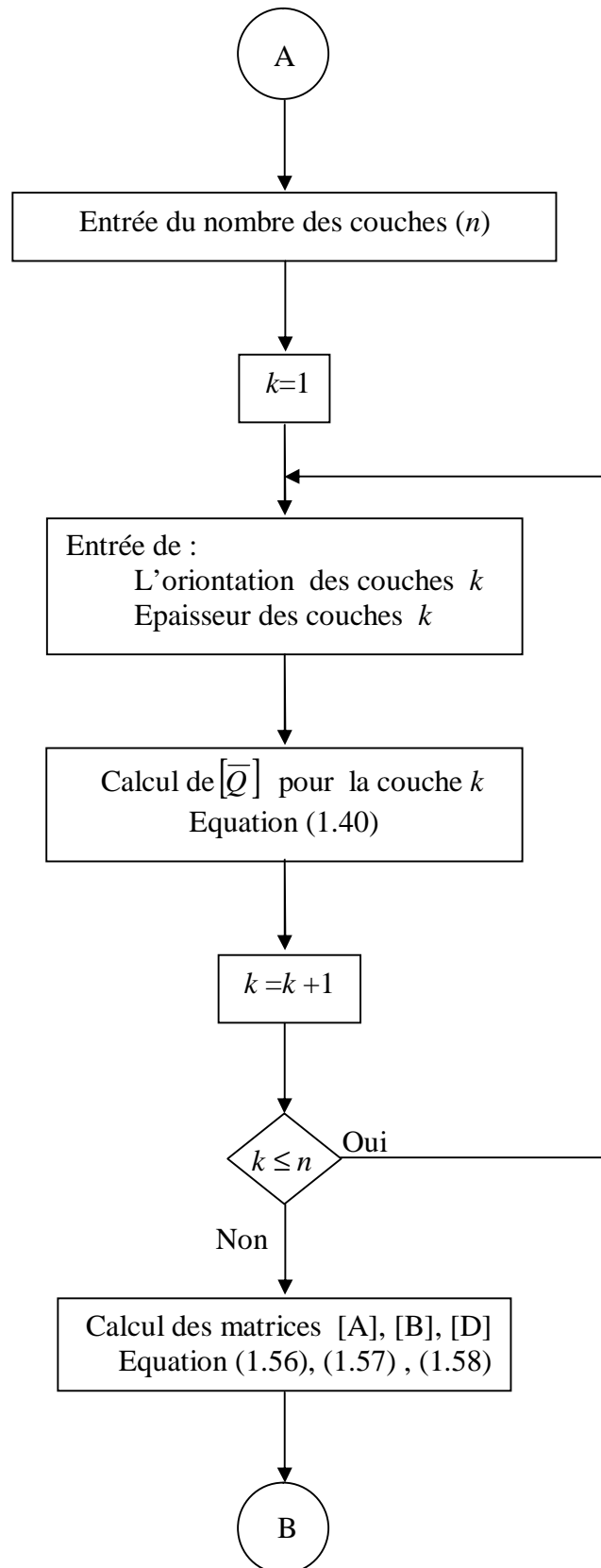
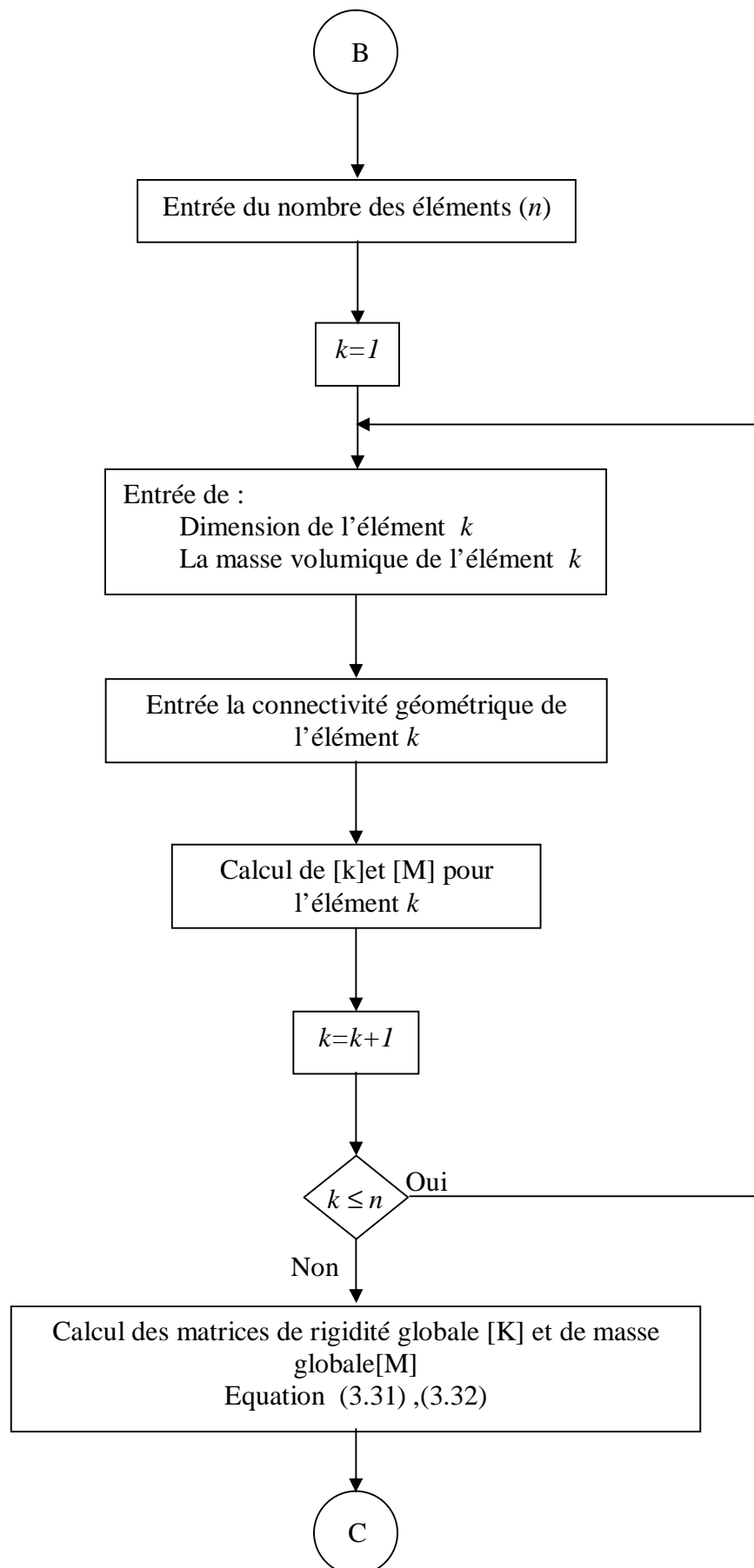


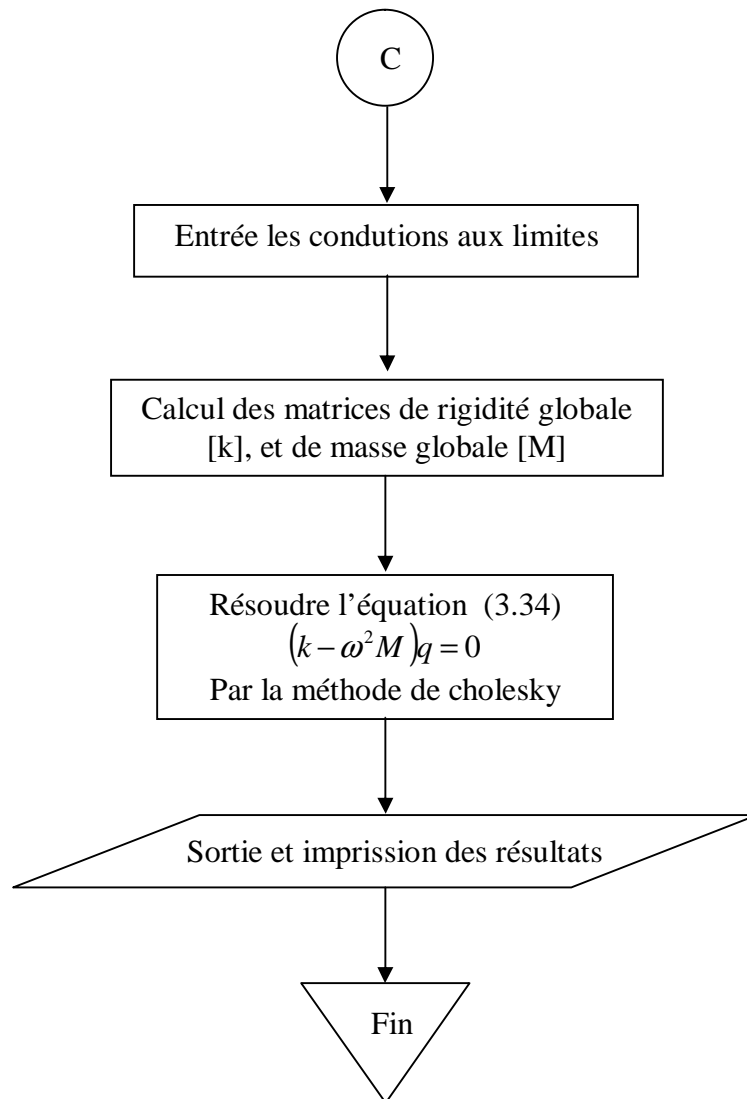
Figure 3.3: Organigramme globale

Figure 3.4: *Organigramme détaillé*









## Bibliographiques

- [1] J.M. Berthelot "Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures, 3ème édition " Paris : Editions Tec&Doc, 1999.
- [4] J.F. Imbert "Analyse des structures par éléments finis " cepadues-editions, Décembre 1984.
- [5] F. Jedrzejewski" Introduction aux méthodes numériques Deuxième édition" Springer-Verlag France, Paris 2005.
- [6] O.C.Zienkiewicz & R.L.Taylor "The Finite Element Method Fifth edition" Butterworth-Heinemann 2000
- Vol. 1: The Basis;
  - Vol. 2: Solid Mechanics;
  - Vol. 3: Fluid Dynamics.
- [7] O.C.Zienkiewicz & R.L.Taylor "The Finite Element Method Sixth edition" Butterworth-Heinemann 2005
- Vol. 1: The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics;
  - Vol. 2: The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals;
  - Vol. 3: The Finite Element Method for fluid Dynamics.
- [8] F.François & J.Jaroslav "Analyse des structures et milieux continus 'méthode des éléments finis"Ecole polytechnique fédérale de Lausanne 2001.
- [9] L. Rockey & W. Griffiths " Introduction à la méthode des éléments finis " Eyrolles, paris 1979



# Chapitre IV

Validation de l'élément fini dans l'analyse du comportement dynamique des plaques.

IV.1 Introduction :	53
IV.2 Validation de l'élément fini dans l'analyse statique des plaques :	54
IV.2 .1 plaque isotrope uniformément chargée:	54
IV.2 .2 Plaque isotrope avec une charge concentrée:	54
IV.3 Validation de l'élément fini dans l'analyse dynamique des plaques :	56
IV.3 .1 plaque isotrope:	56
IV.3 .2 plaque orthotrope:	59
IV.4 Conclusion	62
Bibliographiques:	63

## IV.1 Introduction :

Dans la méthode de Galerkin, la convergence vers la solution exacte est obtenue en enrichissant toujours davantage l'approximation représentant le champ inconnu sur le domaine entier : on augmente le nombre  $N_g$  des termes  $a_i N_i$ .

Dans la méthode des éléments finis, le point de vue est un peu différent et il existe deux types de convergence :

- La convergence par raffinement du maillage sans modifier les fonctions d'interpolation.
- La convergence par enrichissement de l'interpolation sans changement du maillage.

### Convergence par raffinement du maillage:

Considérons un maillage d'éléments finis et appelons  $l$  la dimension caractéristique d'un élément. On subdivise toujours davantage le domaine, en éléments toujours plus petits, chaque nouvelle division contenant la précédente, et on conserve, pour les éléments de même type, constamment la même approximation du champ.

Alors, si les critères de convergence sont remplis, la solution approchée tend vers la solution exacte quand la taille des éléments tend vers zéro ( $l \rightarrow 0$ ). C'est le principe de la convergence par raffinement du maillage.

## IV.2 Validation de l'élément fini dans l'analyse statique des plaques :

### IV.2. 1 plaque isotrope uniformément chargée :

On peut étudier comme exemple de ce type de problème utilisant l'élément dans le chapitre précédent (un élément rectangulaire à 4 nœuds de famille de Hermite, chaque nœud possède 3 degrés de liberté) une plaque carrée isotrope le long de ses quatre bords et chargée uniformément par  $q$ . On divisé la plaque en 64, 100 et 400 éléments et on a comparé les résultats obtenus à partir de la méthode des éléments finis avec ceux de la solution analytique; (cotés encastres : E ou en appuis simples : S).

**Tableau (IV.1)** Convergence de la flèche au centre d'une plaque isotrope, en fonction de nombre des éléments.

$$\bar{w} = wD/qa^4, D = D_{11}$$

w: Déplacement latéral au centre de la plaque

	Eléments	SSSS	Erreur (%)	EEEE	Erreur (%)
Présente étude	8x8	0.0041274	1.6600985	0.0014392	3.3968254
	10x10	0.0041046	1.0985222	0.0012902	2.3968254
	20x20	0.0040538	-0.152709	0.0012700	0.7936507
Ferreira [10]	8x8	0.004024		0.001239	
	10x10	0.004049		0.001255	
	20x20	0.004059		0.001262	
Solution exact		0.004060		0.001260	

### IV.2.2 Plaque isotrope avec une charge concentrée :

Un test classique de plaque isotrope mince fléchi est l'étude d'une plaque carrée, sous charge concentrée centrée; on peut étudier la plaque, avec divers maillages.



**Tableau (IV.2)** Convergence de la flèche au centre, en fonction de nombre des éléments

$$\bar{w} = w D / F a^2$$

$a/b$	Eléments	SSSS	Erreur (%)	EEEE	Erreur (%)
1	Présente étude	8x8	0.011821	1,89814496	0.0057960
		10x10	0.011754	1,32059858	0.0057445
		20x20	0.011617	0,13964554	0.0056481
	Solution exact		0.0116008		0.005605
0.5	Présente étude	8x8	0.016908	2,41066021	
		10x10	0.016798	1,74439733	
		20x20	0.016589	0,47849788	
	Solution exact		0.01651		

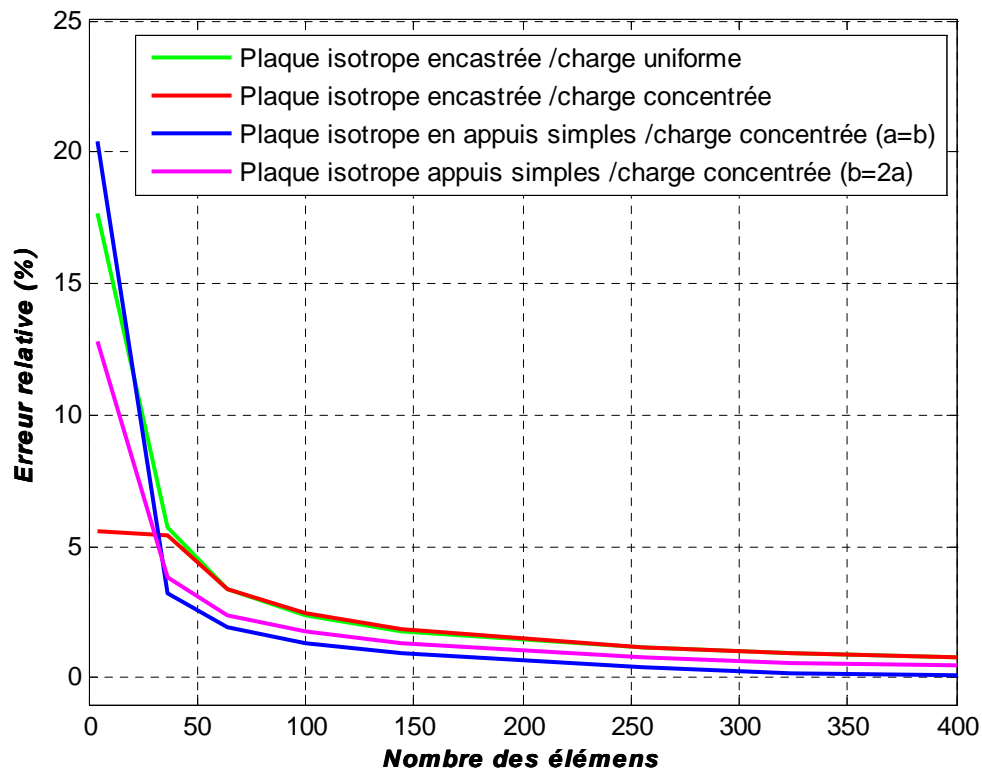


Figure 4.1: Test d'une plaque isotrope : convergence de la flèche au centre.

La figure (4.1) montre un test classique de plaque isotrope mince fléchie, en fonction du nombre des éléments (de degrés de liberté) et des conditions aux limites et de charge. Les résultats ont été comparés à ceux obtenus par la littérature et on montre un résultat suffisant.

## IV.3 Validation de l'élément fini dans l'analyse dynamique des plaques :

## IV.3 .1 Plaque isotrope:

**Tableau (IV.3):** Convergence de la première fréquence propre d'une plaque carré isotrope encastree avec le rapport  $h/a=0.01$  et  $\nu = 0.3$

$$\bar{\omega} = \omega_{mn} a \sqrt{\frac{\rho}{G}} \quad \text{et } \omega_{mn} : \text{pulsation propre en } rd/s$$

8x8	0.17300	Solution analytique [10]	0.1754
10x10	0.17395		
20x20	0.17515	Erreur relative (%)	-0,14253136

**Tableau (IV.4):** Convergence de la première fréquence propre d'une plaque carré isotrope simplement appuis avec le rapport  $h/a=0.01$  et  $\nu = 0.3$

$$\bar{\omega} = \omega_{mn} a \sqrt{\frac{\rho}{G}}$$

8x8	0.095459	Solution analytique [10]	0.0963
10x10	0.095718		
20x20	0.096190	Erreur relative (%)	-0,1142263

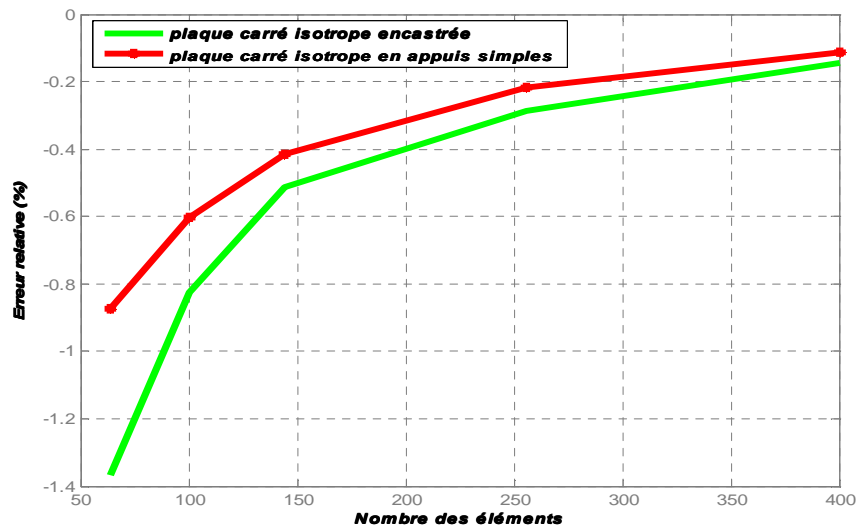


Figure 4.2: Convergence de la première fréquence propre d'une plaque carré isotrope

La figure (4.2) montre la convergence d'erreur relative de la première fréquence propre d'une plaque carrée isotrope, l'erreur 0.14 % dans le cas de plaque encastree, et de 0.11 % dans le cas simplement appuis. Ce qui suffisant acceptable.

**Tableau (IV.5):** Fréquence propre d'une plaque carrée isotrope encastrée avec  $h/a = 0.01$  et  $\nu = 0.3$ 

Modes	m	n	20x20	Ferreira [10]	Rayleigh-Ritz [10]	Liew et al. [10]
1	1	1	0.17515	0.1765	0.1754	0.1743
2	2	1	0.35693	0.3635	0.3576	0.3576
3	1	2	0.35693	0.3635	0.3576	0.3576
4	2	2	0.52394	0.5358	0.5274	0.5240
5	3	1	0.63986	0.6634	0.6402	0.6465
6	1	3	0.64308	0.6665	0.6432	0.6505
7	3	2	0.79719	0.8266		0.8015
8	2	3	0.79719	0.8266		0.8015
9	4	1	1.0241	1.0875		1.0426

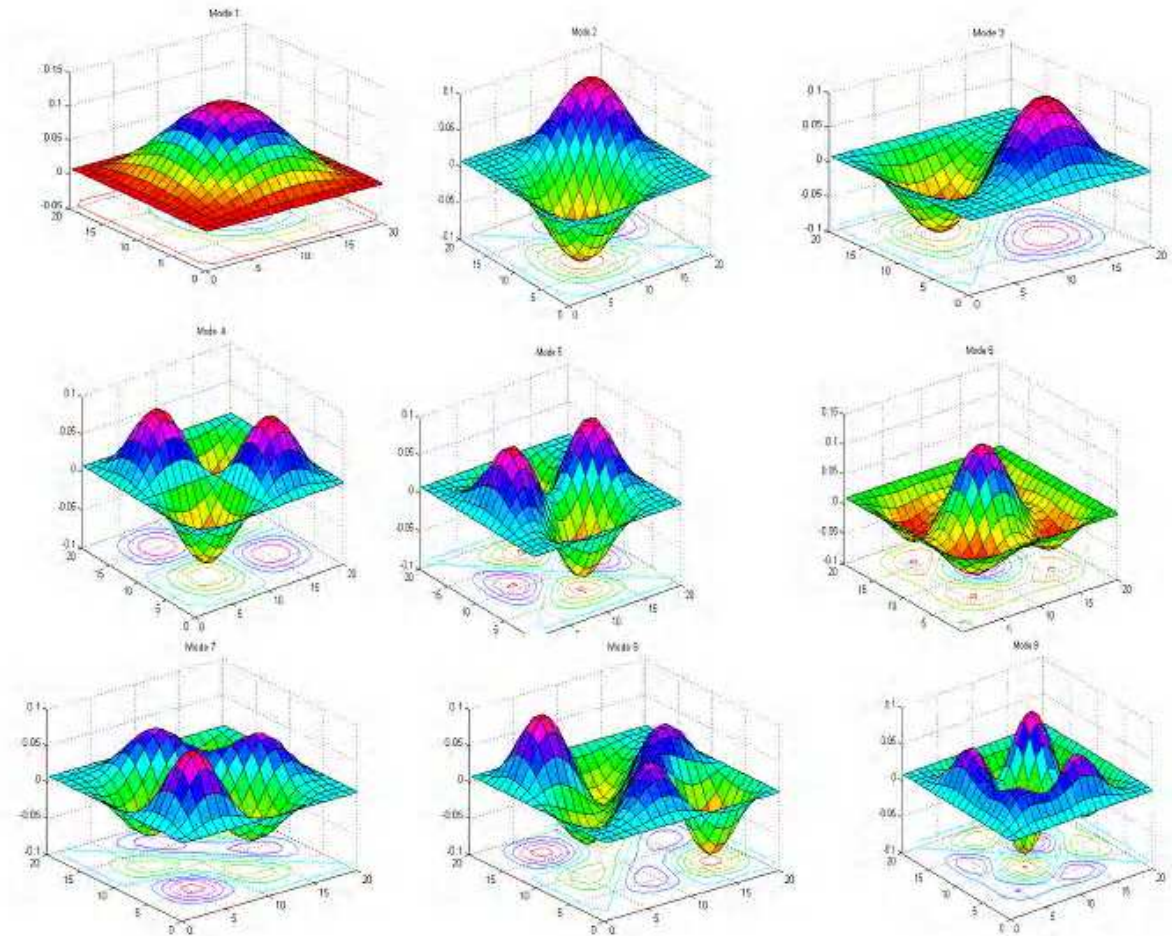


Figure 4.3: Mode propres d'une plaque carrée en matériau isotrope, encastré sur les quatre cotés

**Tableau (IV.6):** Fréquence propre d'une plaque carrée isotrope en appuis simple avec  $h/a = 0.01$  et  $\nu = 0.3$ 

Modes	m	n	20x20	Ferreira [10]	Soulution Analytique[10]
1	1	1	0.09623	0.0965	0.0963
2	2	1	0.24029	0.2430	0.2406
3	1	2	0.24029	0.2430	0.2406
4	2	2	0.38325	0.3890	0.3847
5	3	1	0.48047	0.4928	0.4807
6	1	3	0.48047	0.4928	0.4807
7	3	2	0.62157	0.6380	0.6246
8	2	3	0.62157	0.6380	0.6246
9	4	1	0.81679	0.8550	0.8156

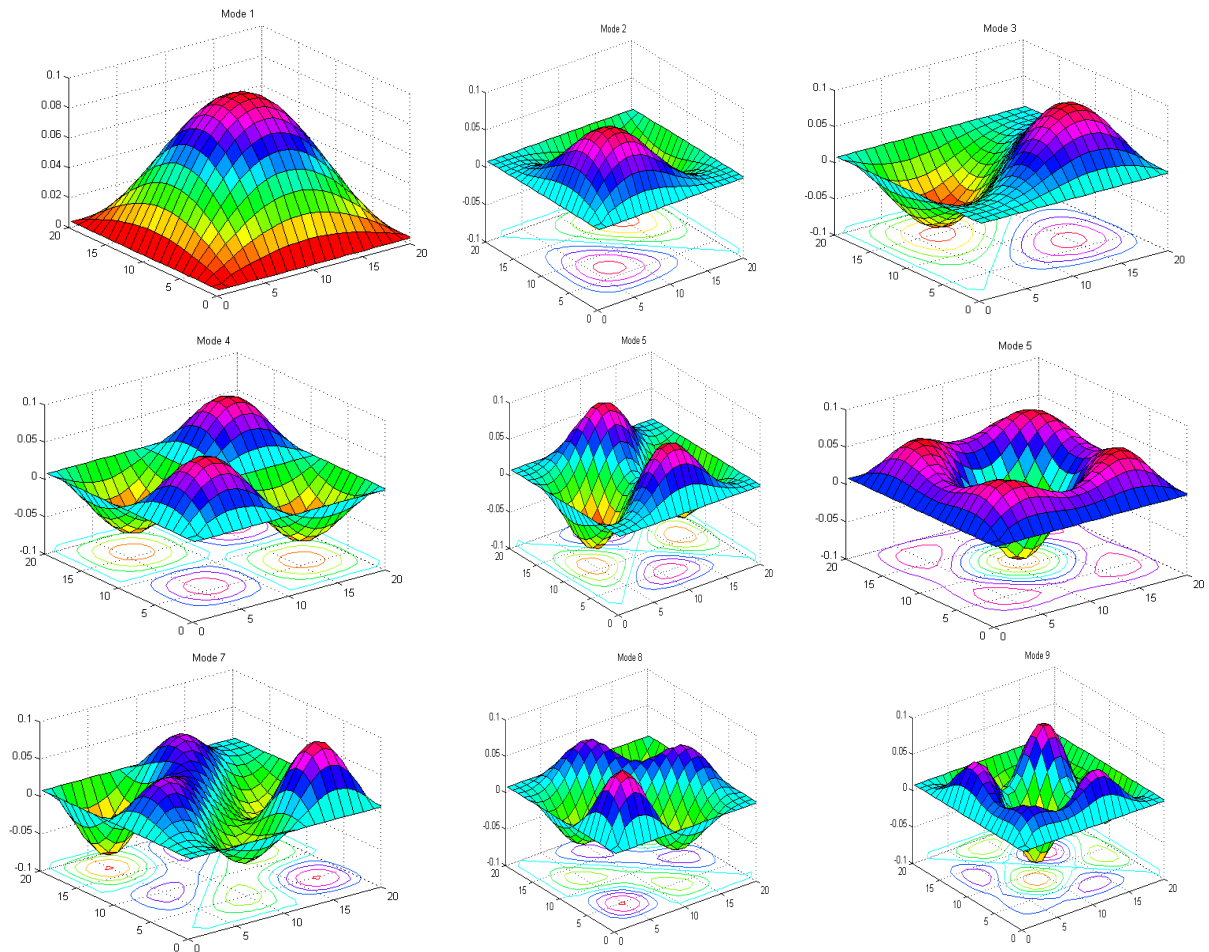


Figure 4.4: Mode propres d'une plaque carrée en matériau isotrope, sur appuis simples

## IV.3 .2 Plaque orthotrope:

Les caractéristiques mécaniques du matériau sont:

$$E_{11}/E_{22} = 40; G_{23} = 0.5E_{22}; G_{13} = G_{12} = 0.6E_{22}; \nu_{12} = 0.25; \nu_{21} = 0.00625$$

**Tableau (IV.7):** Convergence de fréquence propre  $\bar{\omega} = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{(12\rho(1-\nu_{12}\nu_{21})/E_{22}h^2)}$ : plaque rectangulaire de trois couches  $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$  simplement appuyée (SSSS).

			Modes					
$a/b$	$h/b$		1	2	3	4	5	6
1	0.001	8x8	6. 5534	9. 2033	15. 841	24. 841	25. 340	26. 270
		10x10	6. 5814	9. 2909	15. 963	24. 946	25. 748	26. 373
		20x20	6. 6193	9. 4142	16. 152	25. 093	26. 325	26. 591
		Liew [10]	6.6252	9.4470	16.2051	25.1146	26.4982	26.6572
		Ferreira [10] 30x30	6.6342	9.4789	16.3696	25.2510	26.6419	27.199
		Erreur relative (%) à Liew	-0.0890	-0.3365	-0.32764	-0.0860	-0.6536	-0.2483
2	0.001	8x8	2. 3378	6. 5431	6. 5821	9. 0625	14. 142	14. 238
		10x10	2. 3471	6. 5736	6. 6126	9. 1958	14. 191	14. 288
		20x20	2. 3599	6. 6170	6. 6562	9. 3886	14. 272	14. 368
		Liew [10]	2.3618	6.6252	6.6845	9.4470	14.2869	16.3846
		Ferreira [10] 30x30	2.3650	6.6590	6.6986	9.4977	14.4598	14.5588
		Erreur relative (%) à Liew	-0.0804	-0.1237	-0.4233	-0.6181	-0.1042	-1.3105

**Tableau (IV.8):** Convergence de fréquence propre  $\bar{\omega} = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{(12\rho(1-\nu_{12}\nu_{21})/E_{22}h^2)}$  : plaque rectangulaire de trois couches ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) encastrée (EEEE).

			Modes					
$a/b$	$h/b$		1	2	3	4	5	6
1	0.001	8x8	14.467	16.950	23.509	34.486	38.608	38.723
		10x10	14.542	17.177	23.819	34.737	38.835	39.440
		20x20	14.647	17.513	24.337	35.311	39.115	40.459
		Liew [10]	14.6655	17.6138	24.5114	35.5318	39.1572	40.7685
		Ferreira [10] 30x30	14.7151	17.7061	24.8194	36.4114	39.5190	41.1433
		Erreur relative (%) à Liew	-0.12614	-0.5722	-0.71150	-0.6214	-0.1077	-0.7591
2	0.001	8x8	5.0362	10.349	10.405	13.654	19.311	19.446
		10x10	5.0616	10.411	10.467	13.874	19.390	19.524
		20x20	5.0978	10.504	10.560	14.213	19.532	19.664
		Liew [10]	2.3618	6.6252	6.6845	9.4470	14.286	16.3846
		Ferreira [10] 30x30	5.1221	10.6156	10.672	14.4537	19.9064	20.0430

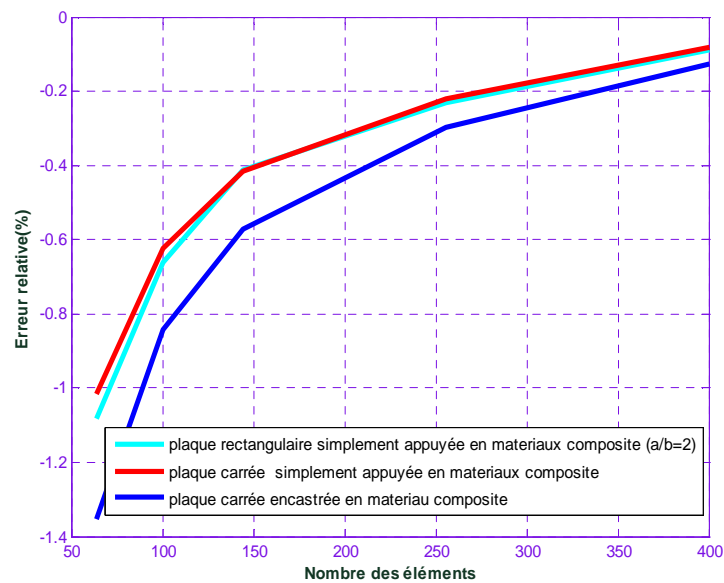


Figure 4.5: Convergence de la première fréquence propre d'une plaque rectangulaire en matériaux composite

La figure (4.5) montre la convergence d'erreur relative de la première fréquence propre d'une plaque en matériaux composites, l'erreur 0.12 % dans le cas de plaque carrée encastree, et de 0.08 % dans le cas simplement appuis. Ce qui suffisant acceptable.

**Tableau (IV.9):** Convergence de la première fréquence propre  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2}$  : plaque carrée sur appuis simples; stratifié croisé symétrique  $[0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0]_o$  pour de rapports  $h/a$  égaux à 0.001, 0.01, 0.02, 0.04, 0.05 et 0.1

$h/a$	présente étude	solution analytique[11]	Van & Tran [12]	Bachene & Rechak [13]	Erreur relative (%) à Réf[13]
0.001	18.8547	-	-	18.891	-0.19215
0.01	18.8547	18.8362	18.9189	18.836	0.09927
0.02	18.8551	18.6742	18.7535	18.674	0.96979
0.04	18.8942	-	18.1380	18.071	4.55536
0.05	18.8549	17.6596	17.7192	17.659	6.77218

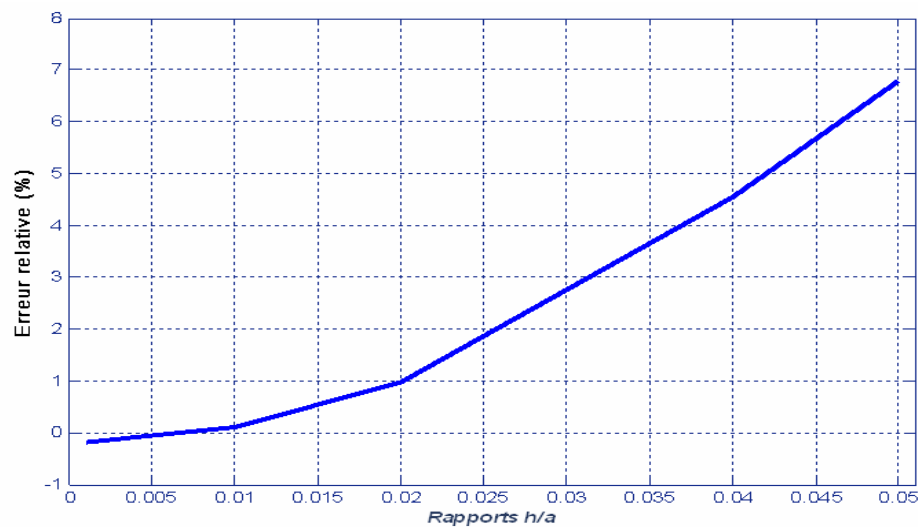


Figure 4.6 : Convergence de la première fréquence propre d'une plaque carrée sur appuis simples en fonction de rapports  $h/a$

La figure (4.6) montre la convergence d'erreur relative de la première fréquence propre d'une plaque carrée sur appuis simples en fonction de rapports  $h/a$ . La dégradation de la précision peut apparaître dans l'analyse des plaques ayant des rapports  $h/a$  relativement élevés, ce qui représente un inconvénient de la théorie et limite son application aux cas des plaques minces (rapport  $h/a \leq 0.02$  ).

## IV.4 Conclusion :

Afin de donner une idée sur l'ordre de précision du programme élaboré, une étude comparative est effectuée sur les flèches au centre de la plaque et les fréquences propres, où nos résultats sont comparés ceux obtenus par des autres études.

L'utilisation d'un champ de déplacement de premier degré, permet d'obtenir à une précision identique à celle obtenue par un champ de déplacement d'un ordre élevé en augmentant le nombre des éléments représentant la structure pour le calcul de la matrice de rigidité et de masse.

La dégradation de la précision peut apparaître dans l'analyse des plaques ayant des rapports  $h/a$  relativement élevés, ce qui représente un inconvénient de la théorie et limite son application aux cas des plaques minces (rapport  $h/a \leq 0.02$  ).



## Bibliographiques

- [1] J.M. Berthelot "Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures, 3ème édition " Paris : Editions Tec&Doc, 1999.
- [10] A. J. M. Ferrera "Matlab codes for Finite Element analysis" Portugal: Springer, 2009  
Vol. 157: Solid Mechanics and Its Applications.
- [11] T. Kant, K. Swaminathan "Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory. Composite Structures, 53 (2001)73-85
- [12] H. Nguyen-Van, N. Mai-Duy, T. Tran-Cong "Free vibration analysis of laminated plate/shell structures based on FSDT with a stabilized nodal-integrated quadrilateral element" Journal of Sound and Vibration 313 (2008) 205–223
- [13] M. Bachene, S. Rechak "Effets du rapport géométrique et de l'orientation des fibres sur les fréquences propres des plaques composite stratifiées"5èmes Journées de Mécanique de l'EMP, 2006
- [14] J. Wang, K.M. Liew, M.J. Tan, S. Rajendran "Analysis of rectangular laminated composite plates via FSDT meshless method" Journal of Mechanical Sciences 44 (2002) 1275–1293
- [15] W.Q. Chen, C.F. Lue "3D free vibration analysis of cross-ply laminated plates with one pair of opposite edges simply supported" Composite Structures 69 (2005) 77–87



## **PARTIE 3**

# **ETUDE PARAMETRIQUE**



## **Chapitre V**

### **Etude paramétrique**

V.1 Effet des conditions aux frontières sur les fréquences propres:	64
V.2 Effet de l'orientation des fibres sur les fréquences propres:	65
V.3 Effet de nombre de couches sur les fréquences propres:	76
V.4 Effets du rapport géométrique et de l'orientation des fibres sur les fréquences propres des plaques composites stratifiées:	78
V.5 Effet du rapport de l'anisotropie sur les fréquences propres:	81
V.6 Conclusion	84

## V.1 Effet des conditions aux frontières sur les fréquences propres:

Un stratifié symétrique  $[0/90/90/0]$  est considéré. Les caractéristiques mécaniques du matériau sont :

$$E_{11}/E_{22} = 40 ; G_{23} = 0.5E_{22} ; G_{13} = G_{12} = 0.6E_{22} ; \nu_{12} = 0.25$$

Le rapport  $h/a$  est fixé à 0.001. La plaque est discrétisée en 20x20 éléments, soit au total 441 nœuds représentant le domaine entier.

**Tableau (V.1):** Fréquence propre  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$ : plaque carré d'un matériau composite symétrique, (cotés encastres: E, cotés en appuis simples S ou cotés libres: L).

Conditions Aux frontières	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
EEEE	41. 721	58. 580	93. 985	107.10	115. 25	137. 25
SSSS	18. 855	33. 706	65. 879	68. 495	74. 986	95. 165
EEEL	17. 099	41. 783	44. 046	59. 763	85. 345	95. 800
EEES	31. 172	51. 646	87. 461	89. 870	97. 412	122. 85
ELLL	5. 9572	6. 6633	17. 861	37. 323	37. 701	43. 384
ESSS	27. 731	39. 440	69. 048	86. 244	91. 427	108. 50
EELL	6. 6933	17. 310	37. 522	42. 457	44. 408	60. 915
EESS	29. 008	44. 963	78. 954	86. 700	94.000	115. 10
SSLL	1. 3214	11. 503	26. 668	30. 905	35. 567	47. 938
ELEL	38. 307	38. 681	42. 783	59. 868	95. 112	105. 59
ESES	39. 221	48. 176	74. 339	106. 12	110. 26	118. 36
SLSL	16. 898	17. 579	25. 113	48. 691	67. 596	68. 251

## V.2 Effet de l'orientation des fibres sur les fréquences propres :

Un stratifié symétrique  $[\theta/-\theta/\theta]_x$  est considéré. Les caractéristiques mécaniques du matériau sont :

$$E_{11}/E_{22}=40 ; G_{23}=0.5E_{22} ; G_{13}=G_{12}=0.6E_{22} ; \nu_{12}=0.25$$

Le rapport  $h/a$  est fixé à 0.001. La plaque est discrétisée en 20x20 éléments, soit au total 441 nœuds représentant le domaine entier.

**Tableau (V.2):** Fréquence propre  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho/E_{22}h^2)}$  : plaque carré sur appuis simples (SSSS), de trois couches  $[\theta/-\theta/\theta]_l$ .

Modes	$\theta^\circ$					
	0	10	20	30	40	45
1	18. 855	18. 859	18. 947	19. 282	19. 635	19. 690
2	23. 313	24. 664	28. 173	32. 383	35. 424	35. 879
3	34. 359	36. 981	43. 463	50. 873	56. 148	56. 187
4	52. 466	55. 671	63. 178	60. 659	56. 765	56. 917
5	72. 692	71. 099	67. 404	74. 311	81. 078	82. 003
6	74. 986	74. 371	74. 667	77. 662	83. 039	84. 363
7	77. 08	80. 305	89. 148	101. 19	108. 94	108. 86
8	80. 674	82. 959	90. 551	103. 09	114. 76	113. 56
9	91. 773	97. 971	114. 10	127. 38	141. 51	116. 60
10	107. 82	107. 57	117. 01	131. 30	150. 51	143. 18
11	109. 73	122. 00	143. 43	137. 42	151. 17	152. 3
12	135. 05	136. 93	146. 24	146. 63	178. 86	153. 91
13	144. 53	155. 48	147. 92	164. 52	185. 81	181. 01

**Tableau (V.3):** Fréquence propre  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$ : plaque carrée sur appuis simples (SSSS), de 6 couches  $[\theta / -\theta / \theta]_2$ .

Modes	$\theta^\circ$					
	0	10	20	30	40	45
1	18.855	19.559	21.322	23.244	24.445	24.607
2	23.313	26.713	34.561	43.255	50.212	51.528
3	34.359	40.080	53.967	65.949	61.985	61.062
4	52.466	59.697	69.405	71.105	85.991	88.495
5	72.692	71.89	79.733	92.789	100.39	103.35
6	74.986	77.649	84.68	107.39	118.52	113.88
7	77.08	85.487	107.56	128.99	130.95	134.35
8	80.674	88.641	111.71	134.63	150.14	154.70
9	91.773	105.53	136.70	151.85	166.68	172.57
10	107.82	116.66	149.78	164.86	184.69	183.12
11	109.73	129.06	149.92	174.3	195.41	189.53
12	135.05	152.02	163.54	203.76	209.56	214.18
13	144.53	159.01	174.59	207.01	229.48	237.47

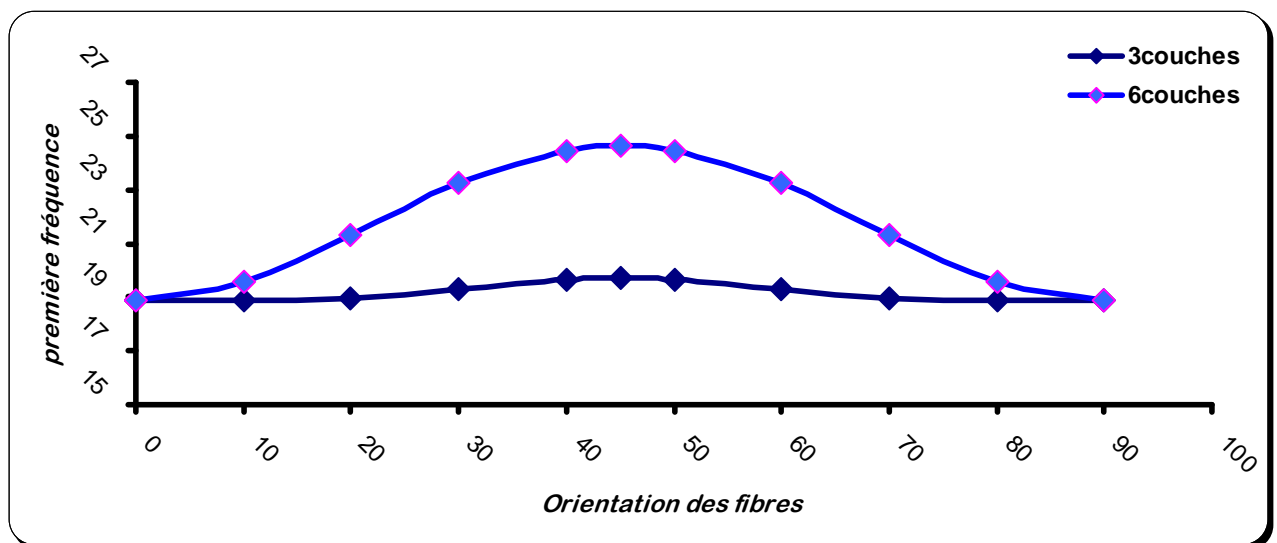


Figure 5.1: Evaluation de la première fréquence  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$  en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque carrée sur appuis simples (SSSS).



**Tableau (V.4):** Fréquence propre  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$ : plaque carré de trois couches  $[\theta / -\theta / \theta]_I$  encastré (EEEE).

Modes	$\theta^\circ$					
	0	10	20	30	40	45
1	41.717	40.820	38.500	35.839	34.151	33.926
2	45.729	45.766	46.750	50.082	54.677	55.644
3	46.498	57.179	62.538	71.990	79.916	78.864
4	55.763	75.988	84.923	89.732	80.515	81.000
5	73.339	101.39	102.23	99.932	109.17	110.48
6	98.377	110.24	106.96	105.65	110.84	113.34
7	113.18	113.60	115.05	130.44	140.84	139.77
8	115.23	133.18	122.01	132.31	147.47	146.50
9	120.35	154.24	144.52	164.19	148.84	149.67
10	130.33	167.19	145.42	164.90	177.03	179.56
11	130.4	185.35	175.31	175.81	187.52	189.84
12	168.79	202.67	179.50	186.40	188.08	192.54
13	171.19	215.06	197.76	200.62	218.71	221.02

**Tableau (V.5):** Fréquence propre  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$ : plaque carré de 6 couches  $[\theta / -\theta / \theta]_2$  encastré (EEEE).

Modes	$\theta^\circ$					
	0	10	20	30	40	45
1	41.717	41.370	40.496	39.606	39.098	39.032
2	45.729	47.568	52.937	61.181	70.418	72.847
3	46.498	60.211	73.103	92.554	85.764	83.272
4	55.763	80.021	100.17	95.466	112.11	115.25
5	73.339	106.66	105.08	121.58	128.03	133.39
6	98.377	110.98	118.03	133.13	152.42	189.39
7	113.18	116.21	135.35	159.17	162.46	211.43
8	115.23	125.66	139.87	177.67	184.34	221.5
9	120.35	140.15	169.02	182.19	201.72	227.33
10	130.33	141.29	176.48	206.02	221.47	254.52
11	130.40	163.58	200.82	207.42	240.02	279.55
12	168.79	179.06	204.11	238.50	249.12	297.05
13	171.19	193.19	216.06	247.73	271.24	307.41

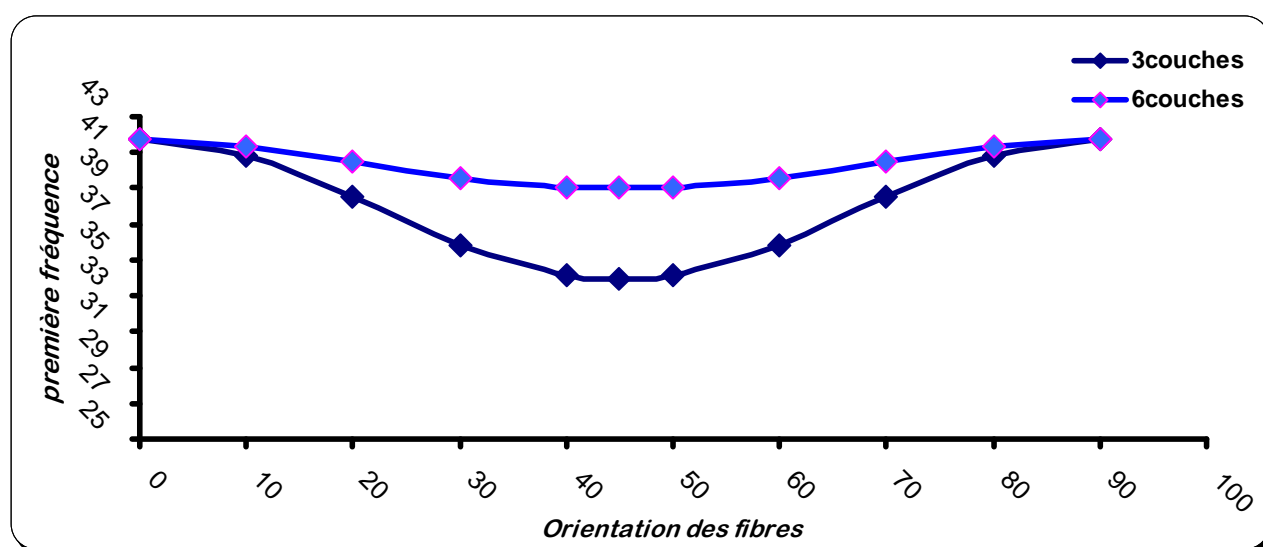


Figure 5.2 : Evaluation de la première fréquence  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$  en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque carrée encastrée (EEEE).

**Tableau (V.6):** Fréquence propre  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$ : plaque rectangulaire sur appuis simples (SSSS), de trois couches  $[\theta / -\theta / \theta]_I$  avec  $a/b=2$ .

Modes	$\theta^\circ$						
	0	15	30	45	60	75	90
1	23.400	27.954	37.111	47.518	59.154	68.932	72.692
2	52.62	60.254	67.440	71.001	72.188	73.949	74.995
3	75.407	79.990	106.77	103.78	93.508	84.029	80.72
4	93.112	98.501	107.76	143.27	122.28	100.47	91.902
5	107.95	131.00	155.16	163.53	157.78	123.82	109.99
6	136.97	145.79	155.93	180.99	199.06	153.95	135.47
7	164.95	162.61	208.93	204.38	223.38	190.51	168.2
8	176.93	191.44	215.08	223.19	233.67	232.91	207.87
9	187.03	201.60	220.47	261.97	246.96	270.83	254.21
10	207.73	222.32	269.66	273.94	255.58	273.4	288.61
11	208.92	257.24	284.28	327.73	287.58	279.42	289.00
12	265.14	264.04	285.32	330.88	294.86	279.50	290.25
13	289.23	280.70	341.15	350.89	332.19	290.32	293.25

**Tableau (V.7):** Fréquence propre  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$ : plaque rectangulaire sur appuis simples (SSSS), de 6 couches  $[\theta / -\theta / \theta]_2$  avec  $a/b=2$ .

Modes	$\theta^\circ$						
	0	15	30	45	60	75	90
1	23.400	30.795	44.386	56.518	65.370	70.811	72.692
2	52.620	68.273	89.935	96.442	91.533	80.713	74.995
3	75.407	82.809	115.71	149.68	127.46	96.995	80.720
4	93.112	117.78	153.21	171.82	171.42	119.48	91.902
5	107.95	135.73	181.5	217.28	223.08	148.07	109.99
6	136.97	166.76	225.89	224.39	230.02	182.71	135.47
7	164.95	178.57	268.81	295.75	260.51	223.36	168.20
8	176.93	209.61	304.41	299.56	282.22	269.71	207.87
9	187.03	224.38	329.18	359.05	307.04	273.03	254.21
10	207.73	252.83	376.18	383.97	347.54	281.53	288.61
11	208.92	284.24	377.65	396.89	367.52	296.36	289.00
12	265.14	285.31	410.97	416.96	417.43	315.39	290.25
13	289.23	327.38	440.28	484.07	441.54	324.37	293.25

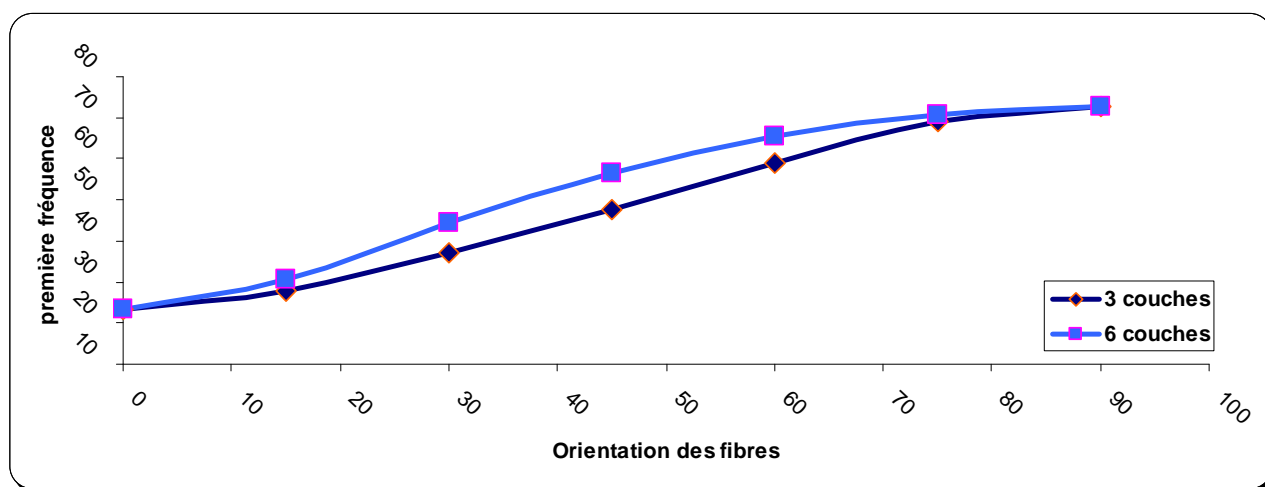


Figure 5.3 : Evaluation de la première fréquence  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$  en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque rectangulaire sur appuis simples (SSSS), avec  $a/b=2$ .

**Tableau (V.8):** Fréquence propre  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$ : plaque rectangulaire de trois couches  $[\theta / -\theta / \theta]_1$  encastré (EEEE), avec  $a/b=2$ .

Modes	$\theta^\circ$						
	0	15	30	45	60	75	90
1	49. 725	52. 232	65. 217	92. 754	126. 77	153. 62	163. 68
2	85. 053	92. 313	102. 60	114. 48	135. 28	156. 09	164. 61
3	117. 59	118. 99	150. 19	149. 84	151. 88	161. 75	167. 50
4	139. 53	176. 05	154. 89	195. 68	177. 81	172. 39	173. 97
5	148. 94	193. 37	206. 53	244. 68	212. 96	189. 62	185. 82
6	188. 95	217. 52	207. 37	245. 21	256. 34	214. 52	204. 55
7	224. 39	246. 94	268. 26	275. 11	306. 31	247. 41	231. 11
8	237. 91	256. 52	275. 32	292. 50	344. 89	288. 10	265. 83
9	239. 06	279. 69	287. 33	331. 68	353. 35	336. 04	308. 64
10	267. 83	319. 48	334. 76	346. 3	357. 54	390. 26	359. 29
11	273. 86	325. 90	353. 08	402. 64	372. 65	421. 83	417. 54
12	336. 22	351. 91	353. 97	409. 04	388. 62	422. 51	446. 64
13	350. 82	376. 26	413. 45	467. 29	423. 15	424. 49	446. 88

**Tableau (V.9):** Fréquence propre  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$ : plaque rectangulaire de 6 couches  $[\theta / -\theta / \theta]_2$  encastré (EEEE), avec  $a/b=2$ .

Modes	$\theta^\circ$						
	0	15	30	45	60	75	90
1	49.725	54.914	72.411	100.52	131.24	154.88	163.68
2	85.053	100.78	126.25	139.40	151.42	160.92	164.61
3	117.59	121.53	162.87	196.02	183.35	171.89	167.50
4	139.53	160.06	200.20	252.59	225.74	188.73	173.97
5	148.94	179.71	232.34	269.95	277.84	212.20	185.82
6	188.95	221.72	290.49	300.91	338.91	242.74	204.55
7	224.39	228.87	294.00	358.45	351.31	280.49	231.11
8	237.91	265.56	329.76	370.95	374.59	325.42	265.83
9	239.06	280.29	371.64	456.24	410.59	377.39	308.64
10	267.83	312.01	395.59	463.09	413.31	423.51	359.29
11	273.86	346.92	448.15	483.23	464.75	429.27	417.54
12	336.22	355.66	467.27	527.9	489.83	435.15	446.64
13	350.82	398.20	484.93	566.66	528.12	440.29	446.88

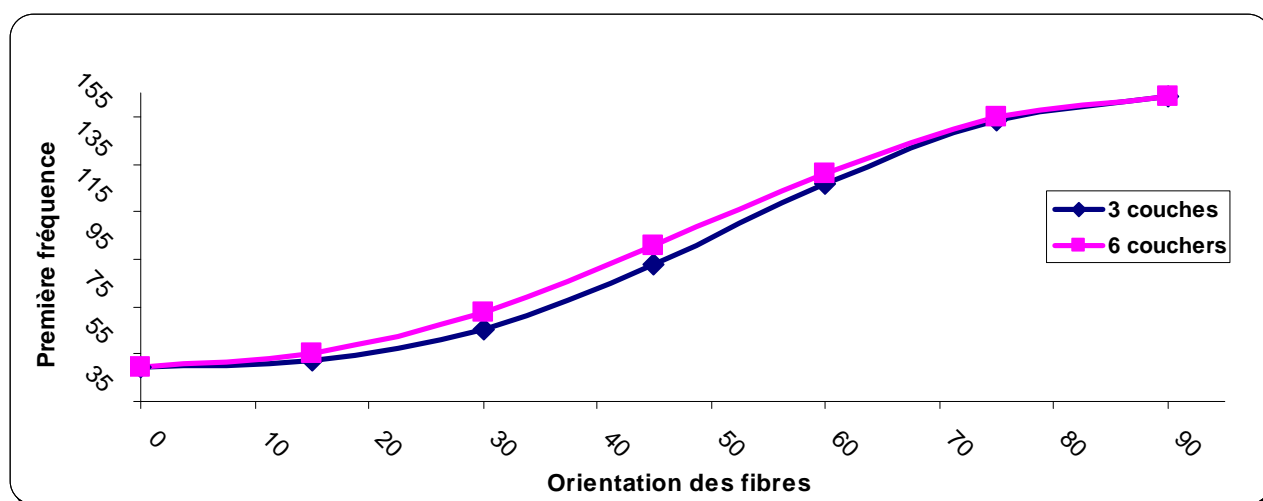


Figure 5.4 : Evaluation de la première fréquence  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$  en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque rectangulaire encastrée (EEEE), avec  $a/b=2$

La valeur de la fréquence  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$  est calculée en fonction de l'angle d'orientation des fibres  $\theta$ , différente condition aux limites, la variation de  $\bar{\omega}$  en fonction de  $\theta$  est représenté sous forme de courbe (figure (5.1, 2, 3 et 4)).

Les cas suivants peuvent être distingués :

Pour une plaque carrée sur appuis simples, la fréquence  $\bar{\omega}$  augmente légèrement dans l'intervalle  $[0^\circ, 45^\circ]$  pour atteindre son maximum à  $\theta = 45^\circ$ , puis diminue symétriquement dans l'intervalle  $[45^\circ, 90^\circ]$  pour le nombre de couches égal à 6, de même pour le nombre de couches égal à 3 la fréquence  $\bar{\omega}$  de même allure mais de façon moins visible.

Pour une plaque carrée encastree, la fréquence  $\bar{\omega}$  diminue légèrement dans l'intervalle  $[0^\circ, 45^\circ]$  pour atteindre son minimum à  $\theta = 45^\circ$ , puis augmente symétriquement dans l'intervalle  $[45^\circ, 90^\circ]$  pour le nombre de couches égal à 3, de même pour le nombre de couches égal à 6 la fréquence  $\bar{\omega}$  de même allure mais de façon moins visible.

Pour une plaque rectangulaire en appuis simples au encastree, la fréquence  $\bar{\omega}$  augmente légèrement dans l'intervalle  $[0^\circ, 90^\circ]$  pour atteindre son maximum à  $\theta = 90^\circ$ , pour le nombre de couches égal à 6, de même pour le nombre de couches égal à 3 la fréquence  $\bar{\omega}$  de même allure, mais de façon moins visible.

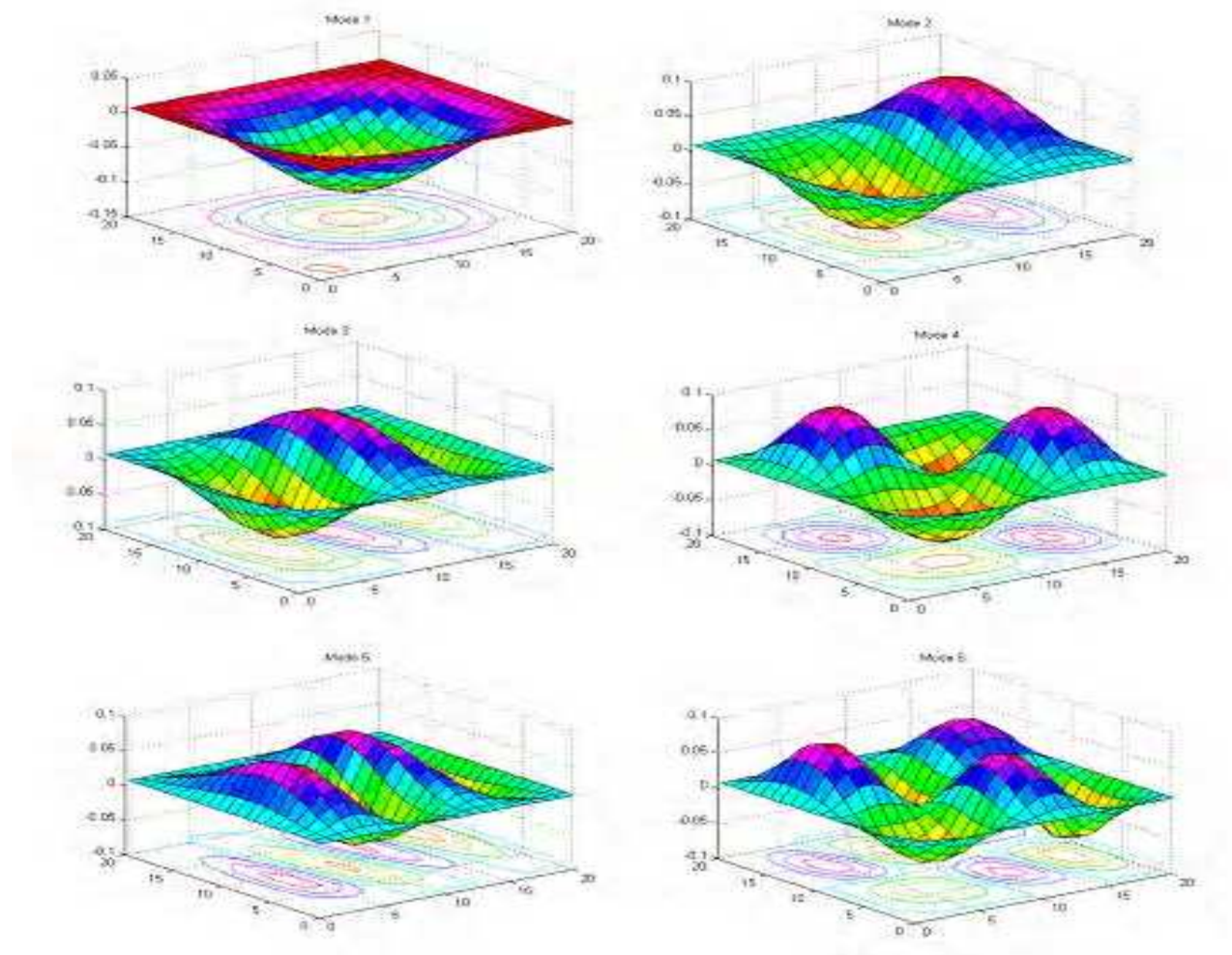


Figure 5.5 : Mode propres d'une plaque carrée en matériau composite, encastré sur les quatre cotés à  $\theta^\circ = 60^\circ$



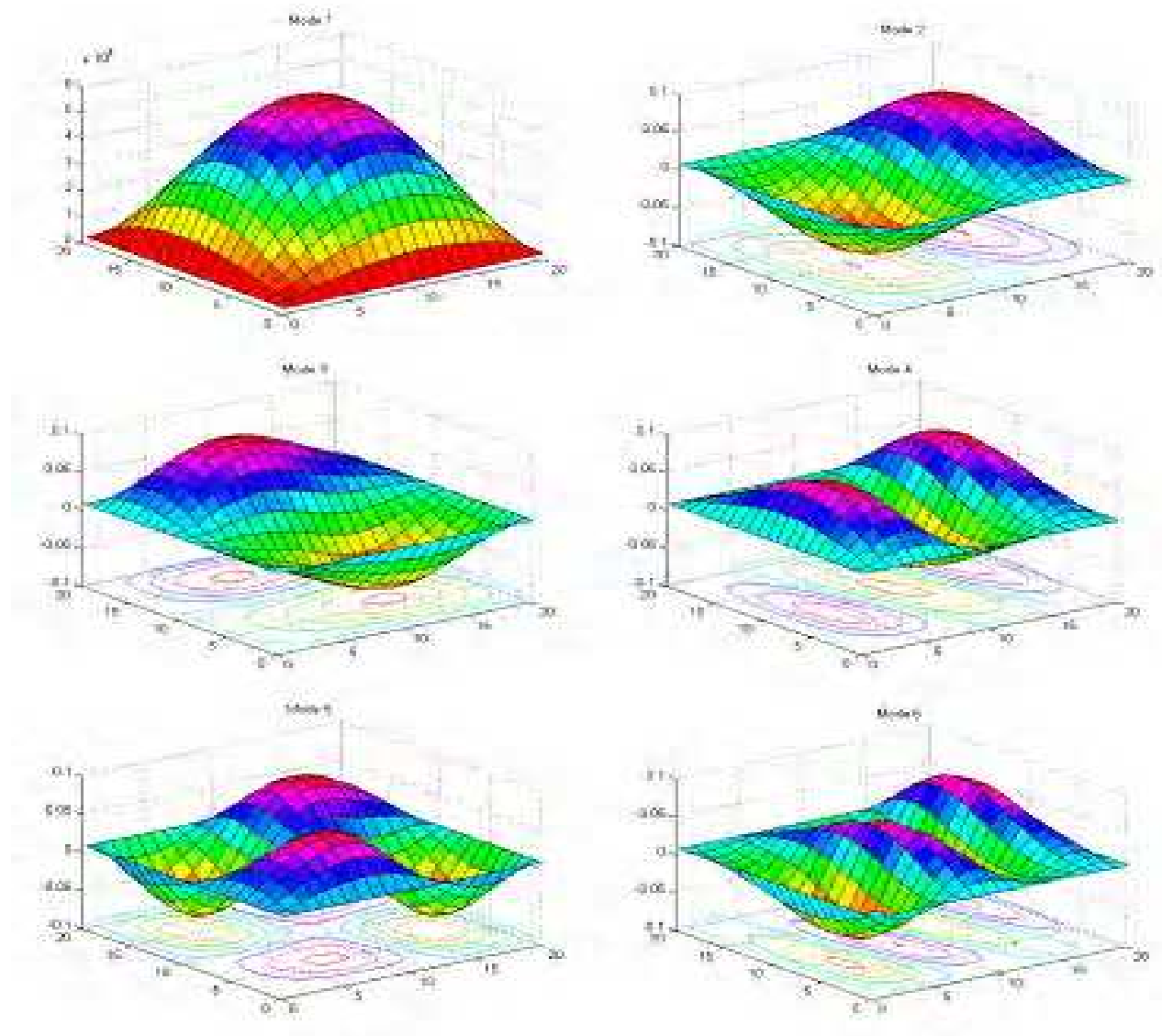


Figure 5.6 : Mode propres d'une plaque carrée en matériau composite, sur appuis simples à  $\theta^\circ = 60^\circ$

### V.3 Effet de nombre de couches sur les fréquences propres:

Un stratifié symétrique  $[45/-45/-45/45]_x$  est considéré. Les caractéristiques mécaniques du matériau sont :

$$E_{11}/E_{22} = 40 ; G_{23} = 0.5E_{22} ; G_{13} = G_{12} = 0.6E_{22} ; \nu_{12} = 0.25$$

Le rapport  $h/a$  est fixé à 0.001. La plaque est discrétisée en 20x20 éléments, soit au total 441 nœuds représentant le domaine entier.

**Tableau (V.10):** Fréquence propre  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$ : plaque carré sur appuis simples (SSSS), en fonction de nombre des couches.

Modes	$n$				
	4	8	12	16	20
1	22. 479	25. 625	25. 760	25. 783	25. 789
2	44. 100	56. 612	57. 911	58. 312	58. 488
3	59. 591	60. 255	59. 526	59. 220	59. 069
4	73. 214	99. 420	101. 98	102. 56	102. 73
5	95. 156	107. 28	107. 81	107. 89	107. 92
6	108. 75	110. 18	108. 57	108. 16	108. 03
7	114. 11	153. 17	158. 01	159. 43	160. 03
8	137. 55	163. 07	162. 81	162. 18	161. 80
9	151. 19	174. 85	174. 81	174. 79	174. 79
10	164. 18	176. 72	175. 24	174. 98	174. 91
11	185. 68	218. 51	226. 32	228. 60	229. 49
12	185. 91	230. 62	233. 17	233. 61	233. 74
13	200. 44	240. 33	236. 79	235. 20	234. 50

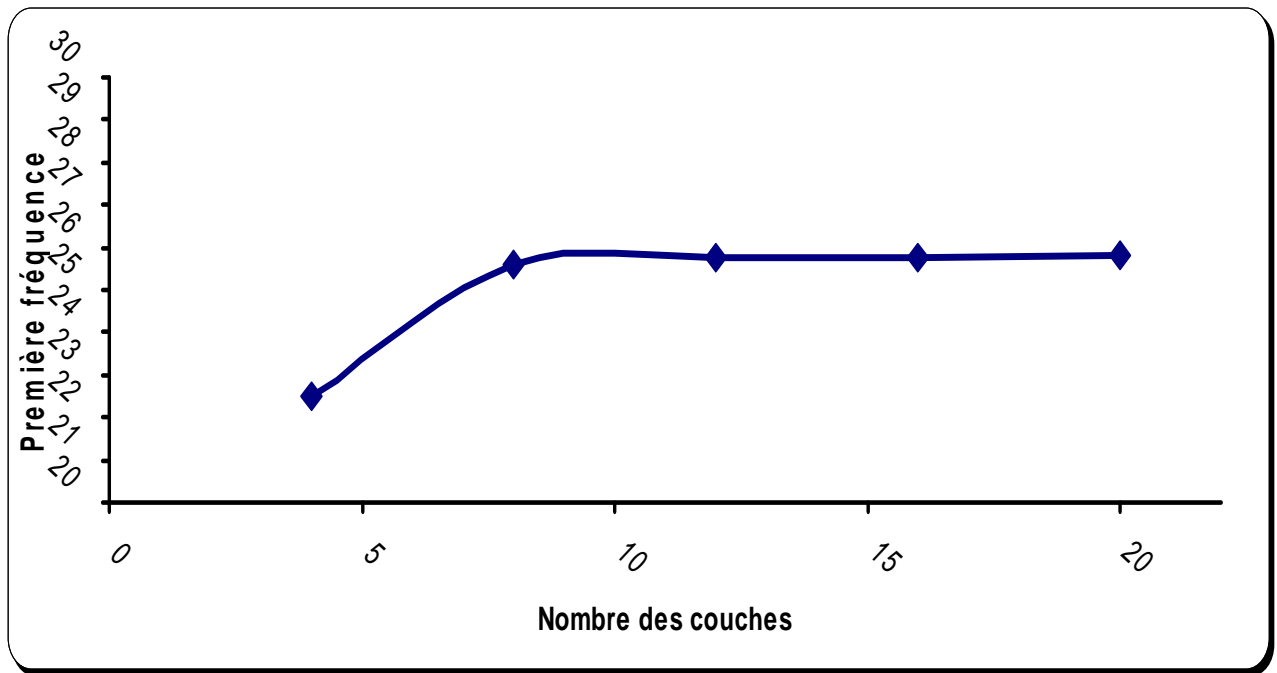


Figure 5.7 : Fréquence propre  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$ : plaque carré simplement appuyée (SSSS), en fonction de nombre des couches.

La valeur de la fréquence  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$  est calculée en fonction de nombre des couches, la variation de  $\bar{\omega}$  en fonction de  $n$  est représenté sous forme de courbe (Figure (5.7)).

La fréquence  $\bar{\omega}$  augmente légèrement jusqu'à  $n = 12$ , pour  $n > 12$  la fréquence  $\bar{\omega}$  ne change pas quelque soit  $n$  augmente.

## V.4 Effets du rapport géométrique et de l'orientation des fibres sur les fréquences propres des plaques composites stratifiées

Un stratifié symétrique  $[\theta/-\theta/\theta/-\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta]$  est considéré. Les caractéristiques mécaniques du matériau sont :

$$E_{11}/E_{22}=40; G_{23}=0.5E_{22}; G_{13}=G_{12}=0.6E_{22}; \nu_{12}=0.25$$

Le rapport  $h/a$  est fixé à 0.02. La plaque est discrétisée en 20x20 éléments, soit au total 441 nœuds représentant le domaine entier.

**Tableau (V.11):** Première fréquence adimensionnelles  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho/E_{22}h^2)}$ : plaque carré sur appuis simples (SSSS), de 8 couches  $[\theta/-\theta/\theta/-\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta]$ .

Rapport ( $a/b$ )	$\theta^\circ$						
	0	15	30	45	60	75	90
0.5	18.173	17.766	16.523	14.367	11.290	7.7845	5.8500
1	18.855	20.540	23.656	25.097	23.656	20.540	18.855
2	23.400	31.138	45.158	57.467	66.093	70.712	74.163
4	52.662	70.580	114.02	173.21	230.22	272.95	288.97
6	107.24	134.17	224.73	361.94	504.49	609.93	633.65
8	187.09	223.61	376.17	626.11	887.14	1080.8	1020.8
10	288.97	336.90	570.97	965.42	1379.5	1404.3	1265.9
12	414.13	475.93	809.02	1380.1	1980.9	1404.3	1265.9
14	562.15	640.32	1090.0	1870.2	2401.5	1404.3	1265.9
16	732.81	829.77	1414.2	2435.5	2401.5	1404.3	1265.9
18	926.30	1044.3	1781.6	3076.2	2401.5	1404.3	1265.9
20	1142.4	1284.3	2192.2	3791.8	2401.5	1404.3	1265.9
22	1381.5	1549.5	2646.0	4188.7	2401.5	1404.3	1265.9
24	1643.2	1840.0	3142.9	4188.7	2401.5	1404.3	1265.9
26	1927.7	2155.6	3683.0	4188.7	2401.5	1404.3	1265.9
30	2560.8	2862.7	4892.5	4188.7	2401.5	1404.3	1265.9
40	4404.7	5071.9	6079.4	4188.7	2401.5	1404.3	1265.9
50	6345.7	7488.3	6079.4	4188.7	2401.5	1404.3	1265.9
60	7832.5	7488.3	6079.4	4188.7	2401.5	1404.3	1265.9

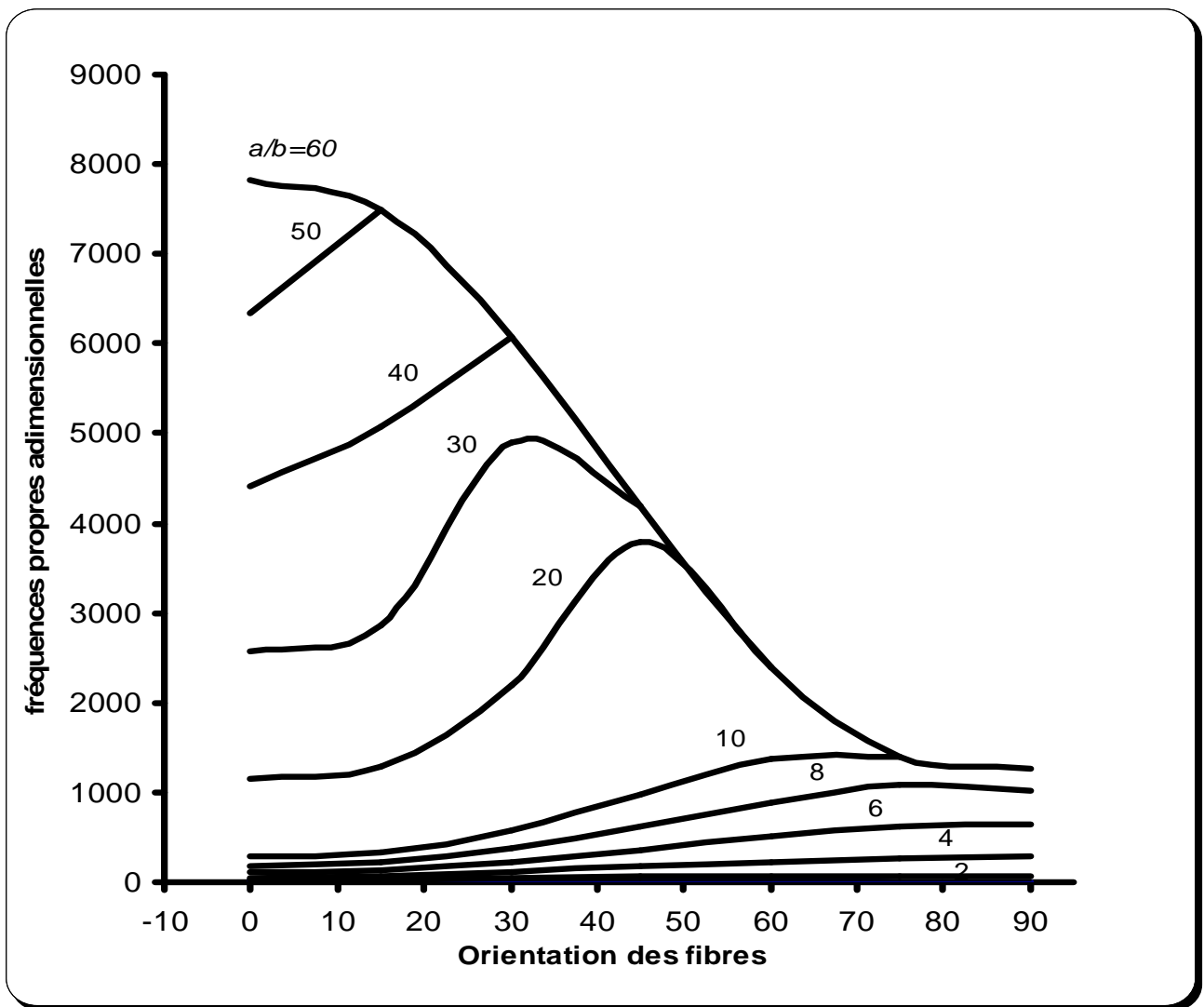


Figure 5.8 : Evaluation de la première fréquence  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$  en fonction de l'angle de l'orientation des fibres  $\theta$  pour différentes valeurs du rapport géométrique  $a/b$  avec  $h/a = 0.02$

La valeur de la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$  est calculée en fonction de l'angle d'orientation des fibres  $\theta$  et les différentes valeurs du rapport  $a/b$ . pour chaque valeur de  $a/b$ , la variation de  $\bar{\omega}$  en fonction de  $\theta$  est représentée sous forme de courbe (figure (5.8)).

Les cas suivants peuvent être distingués :

- pour un rapporte  $a/b < 1$ , la fréquence  $\bar{\omega}$  décroît quand l'angle  $\theta$  augmente,
- pour un rapporte  $a/b = 1$ , la fréquence  $\bar{\omega}$  augmente légèrement dans l'intervalle  $[0^\circ, 45^\circ]$  pour attendre son maximum à  $\theta = 45^\circ$ , puis diminue symétriquement dans l'intervalle  $[45^\circ, 90^\circ]$ .

- Pour des rapports  $1 < a/b < 50$ , la fréquence  $\bar{\omega}$  augmente dans l'intervalle  $[0^\circ, \theta_a]$  pour atteindre son maximum à  $\theta = \theta_a$  (point anguleux), puis elle diminue continuellement dans l'intervalle  $[\theta_a, 90^\circ]$ .
- Pour des rapport  $a/b > 60$ , la fréquence  $\bar{\omega}$  atteint son maximum pour  $\theta = 0^\circ$ , puis diminue rationnellement quand  $\theta$  augmente.

On peut conclure (figure (5.8)), que pour des rapports de  $a/b > 60$ , la valeur maximale de  $\bar{\omega}$  est atteinte toujours à  $\theta = 0^\circ$ ; l'augmentation du rapporte  $a/b$  n'a aucun effet sur la variation de  $\bar{\omega}$ . Cependant, cette position peut être identifiée sous l'appellation: "*position des stabilité des fréquences propres*".

## V.5 Effet du rapport de l'anisotropie ( $E_{11}/E_{22}$ ) sur les fréquences propres:

Un stratifié croisé symétrique  $[0/90/90/0]$  est considéré. Les caractéristiques mécaniques du matériau sont :

$$E_{11}/E_{22} = 1, 10, 20, 30 \text{ et } 40 ; G_{23} = 0.5E_{22} ; G_{13} = G_{12} = 0.6E_{22} ; \nu_{12} = 0.25$$

Le rapport  $h/a$  est fixé à 0.001. La plaque est discrétisée en 20x20 éléments, soit au total 441 nœuds représentant le domaine entier.

**Tableau (V.12):** Fréquence propre  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho/E_{22}h^2)}$  en fonction du rapport  $E_{11}/E_{22}$  pour une plaque carré simplement appuyée (SSSS).

Modes	$E_{11}/E_{22}$							
	1	10	20	30	40	50	60	80
1	25. 625	42. 527	55. 690	66. 293	75. 419	83. 555	90. 967	104. 22
2	62. 169	84. 097	103. 78	120. 31	134. 82	147. 93	159. 96	181. 65
3	62. 169	142. 35	196. 29	235. 06	263. 52	289. 19	312. 77	355. 26
4	102. 18	164. 03	202. 66	238. 32	273. 98	305. 51	334. 07	384. 89
5	121. 36	169. 26	221. 55	263. 68	299. 95	332. 28	361. 74	414. 42
6	121. 36	231. 40	289. 79	338. 29	380. 66	418. 77	453. 70	516. 51
7	163. 80	279. 14	346. 83	403. 40	452. 97	497. 64	538. 62	612. 41
8	163. 80	311. 82	411. 35	476. 59	533. 92	585. 68	633. 22	718. 94
9	203. 77	332. 05	434. 82	530. 01	610. 54	681. 61	745. 95	860. 31
10	203. 77	333. 70	450. 92	544. 44	624. 10	694. 68	758. 73	872. 84
11	247. 39	377. 73	494. 06	587. 83	668. 58	740. 59	806. 18	923. 50
12	247. 39	428. 24	534. 14	622. 40	699. 64	769. 17	832. 93	947. 66
13	309. 60	458. 92	580. 45	676. 43	757. 57	830. 83	898. 13	1019. 5

**Tableau (V.13):** Fréquence propre  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$  en fonction du rapport  $E_{11}/E_{22}$  pour une plaque carré encasté (EEEE).

Modes	$E_{11}/E_{22}$							
	1	10	20	30	40	50	60	80
1	44.546	89.036	120.70	145.63	166.88	185.72	202.81	233.27
2	90.362	137.10	175.59	207.05	234.32	258.74	281.04	321.03
3	90.362	220.44	285.71	333.89	375.94	413.75	448.37	510.63
4	136.10	227.59	305.92	372.25	428.42	478.04	522.97	602.86
5	160.03	251.29	336.08	403.40	460.99	512.15	558.63	641.57
6	160.88	318.99	410.27	484.64	549.02	606.61	659.18	753.40
7	206.25	356.11	445.51	519.79	584.72	643.13	696.65	792.94
8	254.24	423.20	539.30	630.59	710.25	781.83	847.38	965.22
9	254.24	429.00	591.35	721.28	831.13	928.06	1015.8	1158.8
10	277.20	445.53	610.03	738.72	848.08	939.74	1018.0	1171.7
11	371.29	494.57	650.74	759.41	854.35	944.86	1032.6	1188.8
12	371.29	520.08	657.33	787.00	898.17	997.01	1086.9	1247.4
13	371.44	579.89	722.65	841.54	945.59	1039.3	1125.2	1279.8

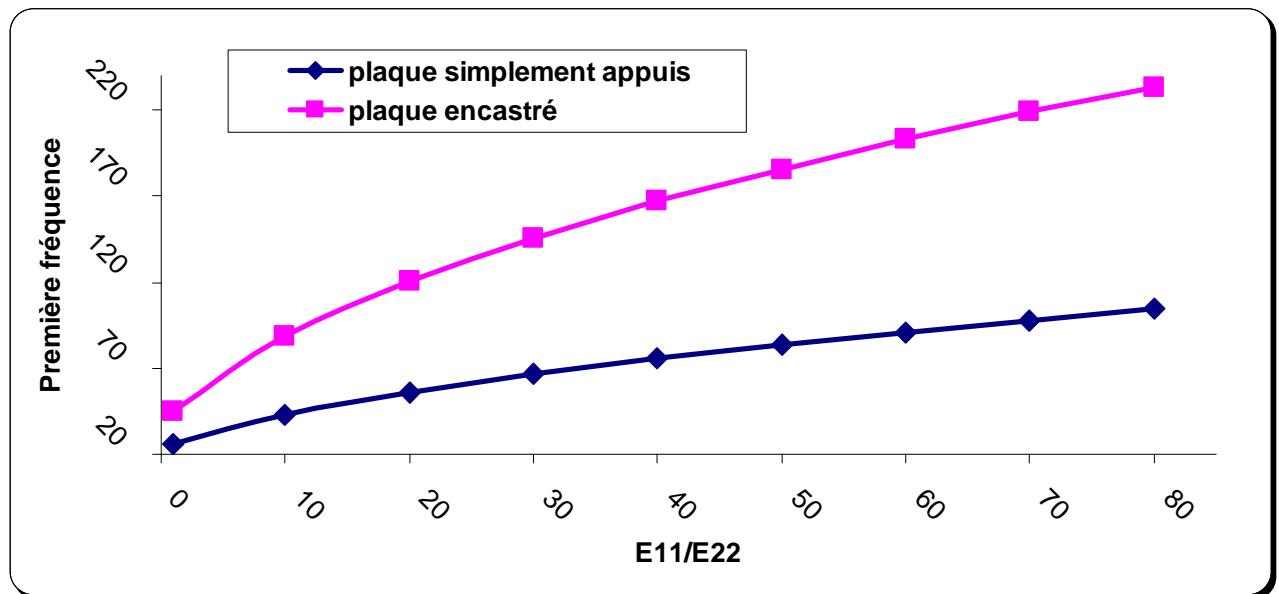


Figure 5.9: Fréquence propre  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$  en fonction du rapport  $E_{11}/E_{22}$  pour une plaque carré.



La valeur de la fréquence  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$  est calculée en fonction du rapport  $E_{11} / E_{22}$ , la variation de  $\bar{\omega}$  en fonction de  $E_{11} / E_{22}$  est représenté sous forme de courbe (Figure (5.9)). La figure montre que l'augmentation du rapport  $E_{11} / E_{22}$ , la première fréquence de vibration augmente

## V.6 Conclusion

L'influence des rapports géométriques, de l'orientation des fibres, de nombre des couches et rapports  $E_{11}/E_{22}$  sur les fréquences de vibration des plaques stratifiées symétriques a été examinée. L'utilisation d'un champ de déplacement de Kirchhoff, permet d'aboutir à une précision d'un ordre élevé en augmentant le nombre des éléments représentants la structure pour le calcul de la matrice de rigidité et de masse.

L'analyse a montré que l'augmentation du rapport géométrique (longueur sur largeur ( $a/b$ )), la première fréquence de vibration augmente, l'effet de l'orientation des fibres: pour chaque valeur de  $a/b$ , la variation de  $\bar{\omega}$  en fonction de  $\theta$  est représentée sous forme de courbe (figure (5.8)).

Les cas suivants peuvent être distingués :

- pour un rapport  $a/b < 1$ , la fréquence  $\bar{\omega}$  décroît quand l'angle  $\theta$  augmente,
- pour un rapport  $a/b = 1$ , la fréquence  $\bar{\omega}$  augmente légèrement dans l'intervalle  $[0^\circ, 45^\circ]$  pour atteindre son maximum à  $\theta = 45^\circ$ , puis diminue symétriquement dans l'intervalle  $[45^\circ, 90^\circ]$ .
- Pour des rapports  $1 < a/b < 50$ , la fréquence  $\bar{\omega}$  augmente dans l'intervalle  $[0^\circ, \theta_a]$  pour atteindre son maximum à  $\theta = \theta_a$  (point anguleux), puis elle diminue continuellement dans l'intervalle  $[\theta_a, 90^\circ]$ .
- Pour des rapport  $a/b > 60$ , la fréquence  $\bar{\omega}$  atteint son maximum pour  $\theta = 0^\circ$ , puis diminue rationnellement quand  $\theta$  augmente.

On peut conclure (figure (5.8)), que pour des rapports de  $a/b > 60$ , la valeur maximale de  $\bar{\omega}$  est atteinte toujours à  $\theta = 0^\circ$ ; l'augmentation du rapport  $a/b$  n'a aucun effet sur la variation de  $\bar{\omega}$ . Cependant, cette position peut être identifiée sous l'appellation: "*position des stabilité des fréquences propres*".

L'augmentation de nombre des couches  $n$  conduit à une position de stabilité pour laquelle la variation de la fréquence propre est constante et l'effet de rapport  $E_{11}/E_{22}$  sur les fréquences propres, la première fréquence de vibration augmente que le rapport  $E_{11}/E_{22}$  augmente.



## **CONCLUSION GENERALE**

## Conclusion générale

L'objectif principal de ce mémoire est de déterminer les fréquences propres ainsi que les modes des vibrations des plaques en matériaux composites stratifiés. Nous avons commencé par une analyse théorique qui présente les matériaux composites stratifiés en termes très généraux et leur comportement mécanique, ainsi que un aperçu sur les comportements dynamiques des structures.

La deuxième partie a été entamée par une formulation par un élément fini et par une programmation. L'analyse a été basée sur un élément rectangulaire à quatre noeuds de type Hermite adapté aux stratifiés. La modélisation de ce type des problèmes est établie par le développement d'un programme informatique permettant la recherche des paramètres modaux (fréquences propres et déformations modales). Par la suite, nous avons donné une idée sur l'ordre de précision de l'élément étudiée, à l'aide d'une étude comparative sur les flèches maximales et les premières fréquences propres avec les résultats obtenus de la littérature. Cette comparaison à montre le bon comportement de l'élément.

La dernière partie de ce mémoire a été consacrée à une étude paramétrique pour mettre en évidence les effets de certains paramètres sur la variation des fréquences naturelles des plaques

- Conditions aux limites.
- Rapport (longueur / largeur)
- Angle d'orientation des fibers.
- Rapport de l' anisotropies.
- Nombres des couches.

Les résultats obtenus ont été présents sur des tableaux et sur des courbes.

**Perspective:**

Comme perspective, on suggère d'élargir cette étude.

- En utilisant un élément plus performant tenant compte l'effet de cisaillement.
- En adoptant d'autres approches comme l'approche par couche.
- Application a d'autre structure plus complexe.



# TABLE DES FIGURES

I.1: Matériau composite	3
I.2: Constitution d'un stratifié	6
I.3: Désignation d'un stratifié	6
I.4 : Composantes des vecteurs contraintes dans un système d'axes (1, 2,3)	7
I.5 : Changement de base	10
I.6 : Essais de traction dans le sens $(\vec{e}_2)$	13
I.7: Déformée de la plaque dans le plan [2, 3]	15
I.8: Système d'axe dans la théorie de plaque	16
I.9: Couche d'un matériau orthotrope	18
I.10 : Résultantes des efforts sur une plaque stratifiée	21
I.11 : Moments de flexion et de torsion	21
III.1: Schéma géométrique d'une plaque stratifiée	38
III.2: Les fonctions de forme	41
III.3: Organigramme globale	47
III.4: Organigramme détaillé	48
IV.1: Test d'une plaque isotrope : convergence de la flèche au centre.	55
IV.2: Convergence de la première fréquence propre d'une plaque carrée isotrope	56
IV.3: Mode propres d'une plaque carrée en matériau isotrope, encastré sur les quatre cotés	57
IV.4: Mode propres d'une plaque carrée en matériau isotrope, sur appuis simples	58
IV.5: Convergence de la première fréquence propre d'une plaque rectangulaire en matériaux composite	60
IV.6: Convergence de la première fréquence propre d'une plaque carrée sur appuis simples en fonction de rapports h/a	61
V.1: Evaluation de la première fréquence $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$ en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque carrée sur appuis simples (SSSS).	66
V.2: Evaluation de la première fréquence $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$ en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque carrée encastré (EEEE).	68
V.3: Evaluation de la première fréquence $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$ en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque rectangulaire sur appuis simples (SSSS), avec a/b=2.	70



- V.4: Evaluation de la première fréquence  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$  en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque rectangulaire encasté (EEEE), avec  $a/b=2$  72
- V.5 Mode propres d'une plaque carrée en matériau composite, encasté sur les quatre cotés à  $\theta^\circ = 60^\circ$  74
- V.6: Mode propres d'une plaque carrée en matériau composite, sur appuis simples à  $\theta^\circ = 60^\circ$  75
- V.7: Fréquence propre  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$ : plaque carré simplement appuyée (SSSS), en fonction de nombre des couches. 77
- V.8: Evaluation de la première fréquence  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$  en fonction des l'angle de l'orientation des fibres  $\theta$  pour différentes valeurs du rapport géométrique  $a/b$  avec  $h/a = 0.02$  79
- V.9: Fréquence propre  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$  en fonction du rapport  $E_{11}/E_{22}$  pour une plaque carré. 82

# LISTE DES TABLEAUX

<b>IV.1</b> Convergence de la flèche au centre d'une plaque isotrope, en fonction de nombre des éléments.	54
<b>IV.2</b> montre la convergence de la flèche au centre, en fonction de nombre des éléments	54
<b>IV.3</b> Convergence de la première fréquence propre d'une plaque carré isotrope encastree avec le rapport $h/a=0.01$ et $\nu = 0.3$	56
<b>IV.4</b> Convergence de la première fréquence propre d'une plaque carré isotrope simplement appuyés avec le rapport $h/a=0.01$ et $\nu = 0.3$	56
<b>IV.5</b> Fréquence propre d'une plaque carrée isotrope encastree avec $h/a = 0.01$ et $\nu = 0.3$	57
<b>IV.6</b> Fréquence propre d'une plaque carrée isotrope en appuis simple avec $h/a = 0.01$	58
<b>IV.7</b> Convergence de fréquence propre $\bar{\omega} = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{(12\rho(1-\nu_{12}\nu_{21})/E_{22}h^2)}$ : plaque rectangulaire de trois couches $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ simplement appuyée (SSSS).	59
<b>IV.8</b> Convergence de fréquence propre $\bar{\omega} = (\omega b^2 / \pi^2) \sqrt{(12\rho(1-\nu_{12}\nu_{21})/E_{22}h^2)}$ : plaque rectangulaire de trois couches $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ encastree (EEEE).	60
<b>IV.9</b> Convergence de la première fréquence propre $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho/E_2 h^2}$ : plaque carrée sur appuis simples; stratifié croisé symétrique $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]_0$ pour de rapports $h/a$ égaux à 0.001, 0.01, 0.02, 0.04, 0.05 et 0.1	61
<b>V.1</b> Fréquence propre $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho/E_{22}h^2)}$ : plaque carré d'un matériaux composite symétrique, (cotés encastres: E, cotés en appuis simples S ou cotés libres: L).	64
<b>V.2</b> Fréquence propre $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho/E_{22}h^2)}$ : plaque carré sur appuis simples (SSSS), de trois couches $[\theta/-\theta/\theta]_1$ .	65
<b>V.3</b> Fréquence propre $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho/E_{22}h^2)}$ : plaque carrée sur appuis simples (SSSS), de 6 couches $[\theta/-\theta/\theta]_2$ .	66
<b>V.4</b> Fréquence propre $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho/E_{22}h^2)}$ : plaque carré de trois couches $[\theta/-\theta/\theta]_1$ encastree (EEEE).	67
<b>V.5</b> Fréquence propre $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho/E_{22}h^2)}$ : plaque carré de 6 couches $[\theta/-\theta/\theta]_2$ encastree (EEEE).	68
	89

- V.6** Fréquence propre  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$ : plaque rectangulaire sur appuis simples (SSSS), de trois couches  $[\theta / -\theta / \theta]_1$  avec  $a/b=2$ . 69
- V.7** Fréquence propre  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$ : plaque rectangulaire sur appuis simples (SSSS), de 6 couches  $[\theta / -\theta / \theta]_2$  avec  $a/b=2$ . 70
- V.8** Fréquence propre  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$ : plaque rectangulaire de trois couches  $[\theta / -\theta / \theta]_1$  encastré (EEEE), avec  $a/b=2$ . 71
- V.9** Fréquence propre  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$ : plaque rectangulaire de trois couches  $[\theta / -\theta / \theta]_2$  encastré (EEEE), avec  $a/b=2$ . 72
- V.10** Fréquence propre  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$ : plaque carré sur appuis simples (SSSS), en fonction de nombre des couches. 76
- V.11** Première fréquence adimensionnelles  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$ : plaque carré sur appuis simples (SSSS), de 8 couches  $[\theta / -\theta / \theta / -\theta / -\theta / \theta / -\theta / \theta]$ . 78
- V.12** Fréquence propre  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$  en fonction du rapport  $E_{11}/E_{22}$  pour une plaque carré simplement appuyée (SSSS). 81
- V.13** Fréquence propre  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{(\rho / E_{22} h^2)}$  en fonction du rapport  $E_{11}/E_{22}$  pour une plaque carré encastré (EEEE). 82



# Bibliographiques

- [1] J.M. Berthelot "Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures, 3ème édition " Paris : Editions Tec&Doc, 1999.
- [2] J. Molimard " Mécanique des Matériaux composites " EMSE 2004.
- [3] N. Bahlouli "Cours Matériaux Composites" site: [www-ipst.u-strasbg.fr/cours/materiaux-composites/tdm.htm](http://www-ipst.u-strasbg.fr/cours/materiaux-composites/tdm.htm). Novembre 2010.
- [4] J.F. Imbert "Analyse des structures par éléments finis " cepadues-editions, Décembre 1984.
- [5] Franck Jedrzejewski" Introduction aux méthodes numériques Deuxième édition" Springer-Verlag France, Paris 2005.
- [6] O.C.Zienkiewicz & R.L.Taylor "The Finite Element Method Fifth edition" Butterworth-Heinemann 2000
  - Vol. 1: The Basis;
  - Vol. 2: Solid Mechanics;
  - Vol. 3: Fluid Dynamics.
- [7] O.C.Zienkiewicz & R.L.Taylor "The Finite Element Method Sixth edition" Butterworth-Heinemann 2005
  - Vol. 1: The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics;
  - Vol. 2: The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals;
  - Vol. 3: The Finite Element Method for fluid Dynamics.
- [8] F.François & J.Jaroslav "Analyse des structures et milieux continus 'méthode des éléments finis"Ecole polytechnique fédérale de Lausanne 2001.
- [9] L. Rockey & W. Griffiths " Introduction à la méthode des éléments finis " Eyrolles, paris 1979.
- [10] A. J. M. Ferreira "Matlab codes for Finite Element analysis" Portugal: Springer, 2009
  - Vol. 157: Solid Mechanics and Its Applications.
- [11] T. Kant, K. Swaminathan "Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory. Composite Structures, 53 (2001)73-85.

- [12] H. Nguyen-Van, N. Mai-Duy, T. Tran-Cong "Free vibration analysis of laminated plate/shell structures based on FSDT with a stabilized nodal-integrated quadrilateral element" *Journal of Sound and Vibration* 313 (2008) 205–223
- [13] M. Bachene, S. Rechak "Effets du rapport géométrique et de l'orientation des fibres sur les fréquences propres des plaques composite stratifiées" 5èmes Journées de Mécanique de l'EMP, 2006
- [14] J. Wang, K.M. Liew, M.J. Tan, S. Rajendran "Analysis of rectangular laminated composite plates via FSDT meshless method" *Journal of Mechanical Sciences* 44 (2002) 1275–1293
- [15] W.Q. Chen, C.F. Lue "3D free vibration analysis of cross-ply laminated plates with one pair of opposite edges simply supported" *Composite Structures* 69 (2005) 77–87



**Résumé:** le travail présenté dans ce mémoire est une analyse numérique des vibrations libres des plaques rectangulaires minces symétriques en matériaux composite stratifié. L'analyse a été basée sur un élément rectangulaire à quatre noeuds de type Hermite adapté aux stratifié, pour examiner l'influence de certain paramètre, tel que le rapport géométrique, l'orientation des fibres et les conditions aux limites,...etc. sur la variation des fréquences propres. Au travers un série d'exemples et comparaison avec des résultats de la littérature, la convergence et la précision des cette élément a été vérifié.

**ملخص:** العمل المقدم في هذه المذكرة عبارة عن تحليل عددي للاهتزازات الحرة لصفحة رقيقة مستطيلة متناضرة من المواد الممزوجة الرقائقية. هذا التحليل يستند على عنصر مستطيل ذو أربعة عقد من نوع "هرميت" لاختبار تأثير بعض الخصائص من مثل: حاصل قسمة الطول على العرض، توجيه الألياف و الشروط الحدية...الخ. على التغير في الاهتزازات الطبيعية. وعن طريق مقارنة النتائج المحصل عليها مع تلك الموجودة في الكتب وجدنا أن دقة التحليل محققة.